844 Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse vom 25. November 1915

Die Feldgleichungen der Gravitation.

Von A. Einstein.

100 Jahre allgemeine Relativitätstheorie

Entstehungsgeschichte und Bedeutung von Einsteins Feldgleichungen

Dieter Bangert, Dirk Berben & Andreas de Vries

Fachhochschule Südwestfalen, Standort Hagen

25. November 2015

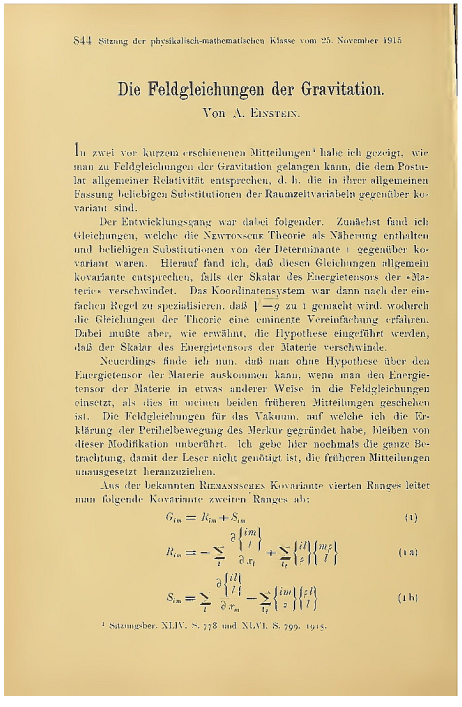
Fachhochschule Südwestfalen
University of Applied Sciences

Übersicht

1. Die Feldgleichungen und ihre Entstehungsgeschichte
   - Einstein und die Königlich-Preußische Akadamie der Wissenschaften 1914
   - Einsteins Forschung 1914/1915: Enthusiasmus und Enttäuschung
   - Bedeutung der Feldgleichungen
2. Exakte Lösungen der Feldgleichungen
   - Vakuumlösungen
   - Lösungen mit Energie und Materie
3. Die allgemeine Relativität im Alltag
   - Das Olbers'sche Paradoxon
   - GPS
4. Schlussbetrachtungen
5. Literatur
6. Weblinks
7. Nachtrag

Donnerstag, der 25. November 1915

- Albert Einstein stellt in einer Sitzung der Königlich-Preußischen Akademie der Wissenschaften in Berlin die Feldgleichungen seiner Gravitationstheorie vor.
- Er bringt damit ein Jahrzehnt seiner intensiven Forschung nach einer „allgemeinen Relativitätstheorie“ zum Abschluss.
- Sein Vortrag wird als Sitzungsbericht veröffentlicht [Ein5c].
  Die Feldgleichungen sind die Gleichungen (2a) auf der zweiten Seite, mit der Bezeichnung G_{im} für den heute so bezeichneten Ricci-Tensor R_{im}.



844 Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse vom 25. November 1915

Die Feldgleichungen der Gravitation.

Von A. Einstein.

In zwei vor kurzem erschienenen Mitteilungen[1] habe ich gezeigt, wie man zu Feldgleichungen der Gravitation gelangen kann, die dem Postulat allgemeiner Relativität entsprechen, d. h. die in ihrer allgemeinen Fassung beliebigen Substitutionen der Raumzeitvariabeln gegenüber kovariant sind.

Der Entwicklungsgang war dabei folgender. Zunächst fand ich Gleichungen, welche die Newtonsche Theorie als Näherung enthalten und beliebigen Substitutionen von der Determinante 1 gegenüber kovariant waren. Hierauf fand ich, daß diesen Gleichungen allgemein kovariante entsprechen, falls der Skalar des Energietensors der »Materie« verschwindet. Das Koordinatensystem war dann nach der einfachen Regel zu spezialisieren, daß $\sqrt{-g}$ zu 1 gemacht wird, wodurch die Gleichungen der Theorie eine eminente Vereinfachung erfahren. Dabei mußte aber, wie erwähnt, die Hypothese eingeführt werden, daß der Skalar des Energietensors der Materie verschwinde.

Neuerdings finde ich nun, daß man ohne Hypothese über den Energietensor der Materie auskommen kann, wenn man den Energietensor der Materie in etwas anderer Weise in die Feldgleichungen einsetzt, als dies in meinen beiden früheren Mitteilungen geschehen ist. Die Feldgleichungen für das Vakuum, auf welche ich die Erklärung der Perihelbewegung des Merkur gegründet habe, bleiben von dieser Modifikation unberührt. Ich gebe hier nochmals die ganze Betrachtung, damit der Leser nicht genötigt ist, die früheren Mitteilungen unausgesetzt heranzuziehen.

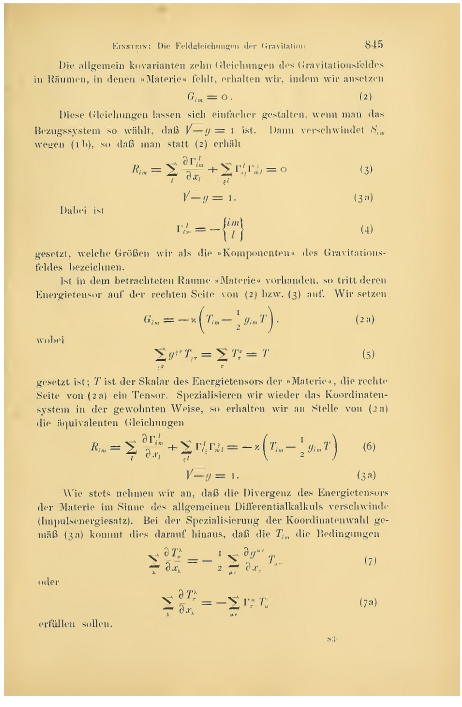
Aus der bekannten Riemannschen Kovariante vierten Ranges leitet man folgende Kovariante zweiten Ranges ab:

$$G_{im} = R_{im} + S_{im} \tag{1}$$

$$R_{im} = -\sum_{l} \frac{\partial \left\{ \begin{matrix} im \\ l \end{matrix} \right\}}{\partial x_l} + \sum_{lr} \left\{ \begin{matrix} il \\ s \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} ms \\ l \end{matrix} \right\} \tag{1a}$$

$$S_{im} = \sum_{l} \frac{\partial \left\{ \begin{matrix} il \\ l \end{matrix} \right\}}{\partial x_m} - \sum_{ls} \left\{ \begin{matrix} im \\ s \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} sl \\ l \end{matrix} \right\} \tag{1b}$$

[1] Sitzungsber. XLIV. S. 778 und XLVI. S. 799. 1915.



Einstein: Die Feldgleichungen der Gravitation. 845

Die allgemein kovarianten zehn Gleichungen des Gravitationsfeldes in Räumen, in denen »Materie« fehlt, erhalten wir, indem wir ansetzen

$$G_{im} = 0. \tag{2}$$

Diese Gleichungen lassen sich einfacher gestalten, wenn man das Bezugssystem so wählt, daß $\sqrt{-g} = 1$ ist. Dann verschwindet S_{im} wegen (1b), so daß man statt (2) erhält

$$R_{im} = \sum_{l} \frac{\partial \Gamma^{l}_{im}}{\partial x_l} + \sum_{jl} \Gamma^{j}_{il} \Gamma^{l}_{mj} = 0 \tag{3}$$

$$\sqrt{-g} = 1. \tag{3a}$$

Dabei ist

$$\Gamma^{l}_{im} = -\left\{ \begin{matrix} im \\ l \end{matrix} \right\} \tag{4}$$

gesetzt, welche Größen wir als die »Komponenten« des Gravitationsfeldes bezeichnen.

Ist in dem betrachteten Raume »Materie« vorhanden, so tritt deren Energietensor auf der rechten Seite von (2) bzw. (3) auf. Wir setzen

$$G_{im} = -\varkappa \left(T_{im} - \frac{1}{2} g_{im} T \right), \tag{2a}$$

wobei

$$\sum_{ir} g^{ir} T_{ir} = \sum_{r} T^{r}_{r} = T \tag{5}$$

gesetzt ist; T ist der Skalar des Energietensors der »Materie«, die rechte Seite von (2a) ein Tensor. Spezialisieren wir wieder das Koordinatensystem in der gewohnten Weise, so erhalten wir an Stelle von (2a) die äquivalenten Gleichungen

$$R_{im} = \sum_{l} \frac{\partial \Gamma^{l}_{im}}{\partial x_l} + \sum_{jl} \Gamma^{j}_{il} \Gamma^{l}_{mj} = -\varkappa \left(T_{im} - \frac{1}{2} g_{im} T \right) \tag{6}$$

$$\sqrt{-g} = 1. \tag{3a}$$

Wie stets nehmen wir an, daß die Divergenz des Energietensors der Materie im Sinne des allgemeinen Differentialkalkuls verschwinde (Impulsenergiesatz). Bei der Spezialisierung der Koordinatenwahl gemäß (3a) kommt dies darauf hinaus, daß die T_{im} die Bedingungen

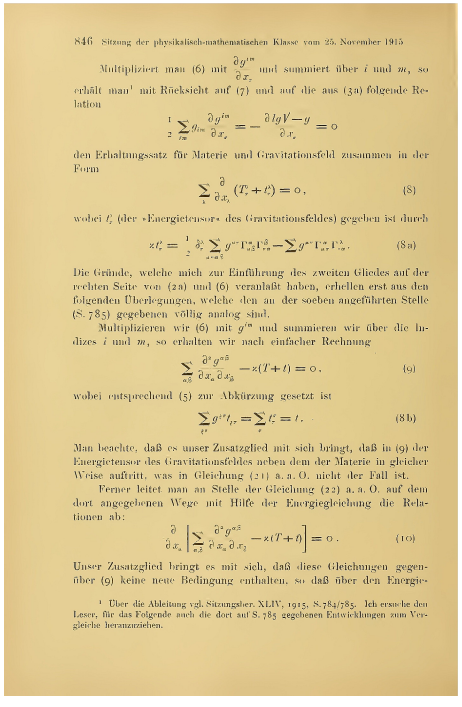
$$\sum_{s} \frac{\partial T^{s}_{i}}{\partial x_s} = -\frac{1}{2} \sum_{rs} \frac{\partial g^{rs}}{\partial x_i} T_{rs} \tag{7}$$

oder

$$\sum_{s} \frac{\partial T^{s}_{i}}{\partial x_s} = -\sum_{rs} \Gamma^{r}_{is} T_{rs} \tag{7a}$$

erfüllen sollen.

84*



846 Sitzung der physikalisch-mathematischen Klasse vom 25. November 1915

Multipliziert man (6) mit $\frac{\partial g^{im}}{\partial x_r}$ und summiert über i und m, so erhält man[1] mit Rücksicht auf (7) und auf die aus (3a) folgende Relation

$$\frac{1}{2} \sum_{im} g_{im} \frac{\partial g^{im}}{\partial x_r} = -\frac{\partial \lg \sqrt{-g}}{\partial x_r} = 0$$

den Erhaltungssatz für Materie und Gravitationsfeld zusammen in der Form

$$\sum_{s} \frac{\partial}{\partial x_s} (T^{s}_{r} + t^{s}_{r}) = 0, \tag{8}$$

wobei t^{s}_{r} (der »Energietensor« des Gravitationsfeldes) gegeben ist durch

$$\varkappa t^{s}_{r} = \frac{1}{2} \delta^{s}_{r} \sum_{\alpha\beta\gamma\delta} g^{\alpha\gamma} \Gamma^{\beta}_{\alpha\delta} \Gamma^{\delta}_{\gamma\beta} - \sum_{\alpha\beta\gamma} g^{\alpha\gamma} \Gamma^{\beta}_{\alpha\gamma} \Gamma^{s}_{\beta\gamma}. \tag{8a}$$

Die Gründe, welche mich zur Einführung des zweiten Gliedes auf der rechten Seite von (2a) und (6) veranlaßt haben, erhellen erst aus den folgenden Überlegungen, welche den an der soeben angeführten Stelle (S. 785) gegebenen völlig analog sind.

Multiplizieren wir (6) mit g^{im} und summieren wir über die Indizes i und m, so erhalten wir nach einfacher Rechnung

$$\sum_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \varkappa (T + t) = 0, \tag{9}$$

wobei entsprechend (5) zur Abkürzung gesetzt ist

$$\sum_{ir} g^{ir} t_{ir} = \sum_{r} t^{r}_{r} = t. \tag{8b}$$

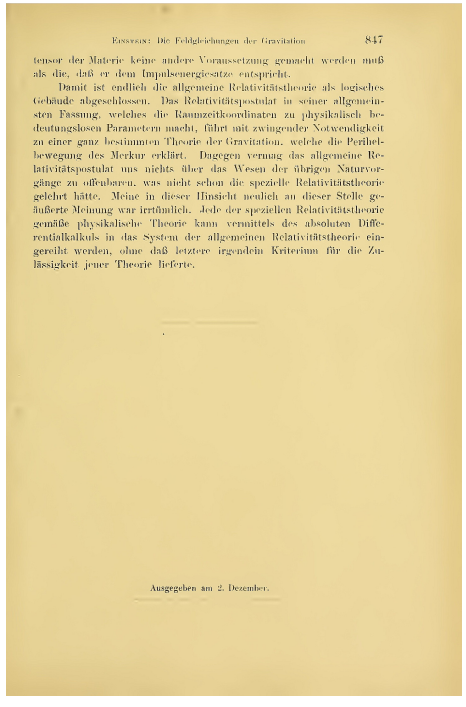
Man beachte, daß es unser Zusatzglied mit sich bringt, daß in (9) der Energietensor des Gravitationsfeldes neben dem der Materie in gleicher Weise auftritt, was in Gleichung (21) a. a. O. nicht der Fall ist.

Ferner leitet man an Stelle der Gleichung (22) a. a. O. auf dem dort angegebenen Wege mit Hilfe der Energiegleichung die Relationen ab:

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left[\sum_{\beta\beta} \frac{\partial^2 g^{\alpha\beta}}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \varkappa (T + t) \right] = 0. \tag{10}$$

Unser Zusatzglied bringt es mit sich, daß diese Gleichungen gegenüber (9) keine neue Bedingung enthalten, so daß über den Energie-

[1] Über die Ableitung vgl. Sitzungsber. XLIV, 1915, S. 784/785. Ich ersuche den Leser, für das Folgende auch die dort auf S. 785 gegebenen Entwicklungen zum Vergleiche heranzuziehen.



Einstein: Die Feldgleichungen der Gravitation 847

tensor der Materie keine andere Voraussetzung gemacht werden muß als die, daß er dem Impulsenergiesatze entspricht.

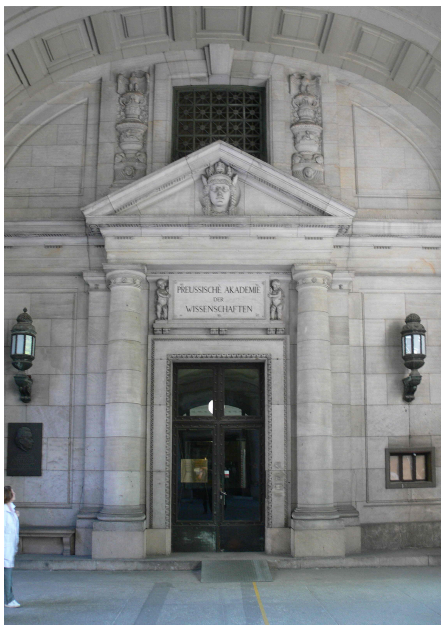
Damit ist endlich die allgemeine Relativitätstheorie als logisches Gebäude abgeschlossen. Das Relativitätspostulat in seiner allgemeinsten Fassung, welches die Raumzeitkoordinaten zu physikalisch bedeutungslosen Parametern macht, führt mit zwingender Notwendigkeit zu einer ganz bestimmten Theorie der Gravitation, welche die Perihelbewegung des Merkur erklärt. Dagegen vermag das allgemeine Relativitätspostulat uns nichts über das Wesen der übrigen Naturvorgänge zu offenbaren, was nicht schon die spezielle Relativitätstheorie gelehrt hätte. Meine in dieser Hinsicht neulich an dieser Stelle geäußerte Meinung war irrtümlich. Jede der speziellen Relativitätstheorie gemäße physikalische Theorie kann vermittels des absoluten Differentialkalkuls in das System der allgemeinen Relativitätstheorie eingereiht werden, ohne daß letztere irgendein Kriterium für die Zulässigkeit jener Theorie liefert.

Ausgegeben am 2. Dezember.

(Quelle: Astrophysics Data System, Harvard University)

Die Königlich-Preußische Akademie der Wissenschaften

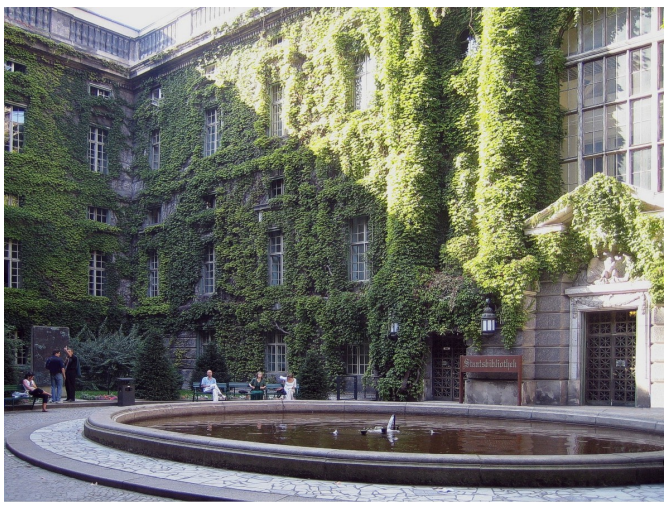
- Staatliche Forschungsanstalt des Königreichs Preußen
- Auf Betreiben von Leibniz am 11. Juli 1700 als *Kurfürstlich-Brandenburgische Societät der Wissenschaften* gegründet und nach einer tiefgreifenden Reorganisation 1812 umbenannt
- Seit 1914 im Westflügel des Innenhofs der neu errichteten Staatsbibliothek Unter den Linden 8 untergebracht



(Bildquellen: Staatsbibliothek Berlin, wikimedia.org)

Die Königlich-Preußische Akademie der Wissenschaften

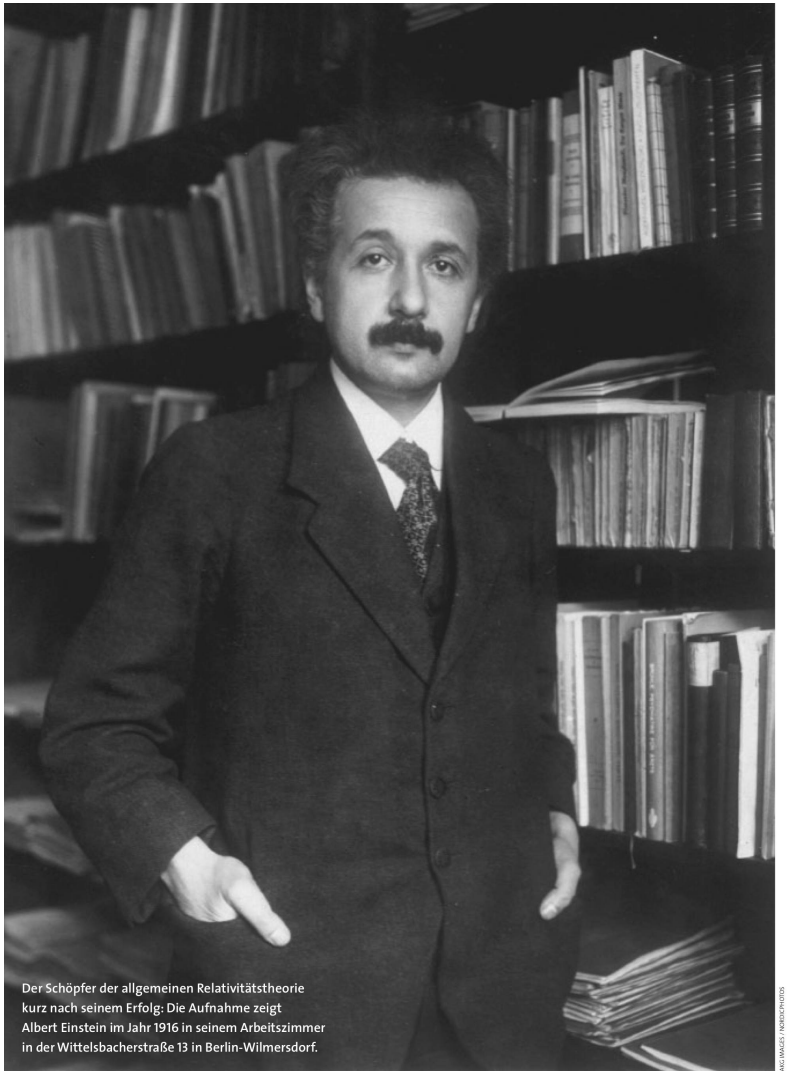
- Um ordentliches Mitglied der Akademie zu werden, musste man von den ordentlichen Mitgliedern zugewählt („kooptiert“) werden.
- Die Akademie war seit 1830 in die physikalisch-mathematische Klasse und die philosophisch-historische Klasse gegliedert.
- Wöchentlich fanden Sitzungen der etwa 50 ordentlichen Mitglieder in den beiden Klassen oder im Plenum statt [Föl93, S. 381]
- Die Sitzungen wurden protokolliert und als Sitzungsberichte veröffentlicht.



(Bildquellen: Staatsbibliothek Berlin, wikimedia.org)

Einsteins Anstellung an der Akademie

- Seit WS 1912/13 war Albert Einstein Professor an der ETH in Zürich
- Am 12. Juli 1913 boten ihm die ordentlichen Mitglieder Max Planck und Walther Nernst eine Forschungsstelle an der Akademie und eine Professur ohne Lehrverpflichtung an der Berliner Universität an
- Dezember 1913: Einstein nahm das Angebot formell an und trat die Stelle zum 1. April 1914 an.
- Einstein erlangte damit übrigens automatisch die deutsche Staatsbürgerschaft, neben seiner schweizerischen, die er auf keinen Fall ablegen wollte. [Cla74, S. 128].
- Am 2. Juli 1914 hielt er seine Antrittsrede vor der Akademie [Cla74, S. 129].



Einstein 1916 (Bildquelle: [JR15])

Einsteins Antritt in Berlin im Juli 1914: Kein guter Start ...

- Einstein legte in der Antrittsrede sein Forschungsprogramm dar:
  - Verallgemeinerung seiner speziellen Relativitätstheorie („Korrespondenzprinzip“)
  - experimentelle Überprüfung der theoretischen Vorhersagen, „was die Anspannung aller Kräfte erfordert“ [Cla74, S. 129]
- Dennoch schimmern tiefe Zweifel durch:

Zitat (Einstein in seiner Antrittsrede am 2. Juli 1914)

„Sie haben es mir durch die Berufung an Ihre Akademie ermöglicht, mich frei von den Aufregungen und Sorgen eines praktischen Berufes ganz den wissenschaftlichen Studien zu widmen. Ich bitte Sie, von meinem Gefühl der Dankbarkeit und der Emsigkeit meines Strebens auch dann überzeugt zu sein, wenn Ihnen die Früchte meiner Bemühungen als ärmliche erscheinen werden.“ [Cla74, S. 129]

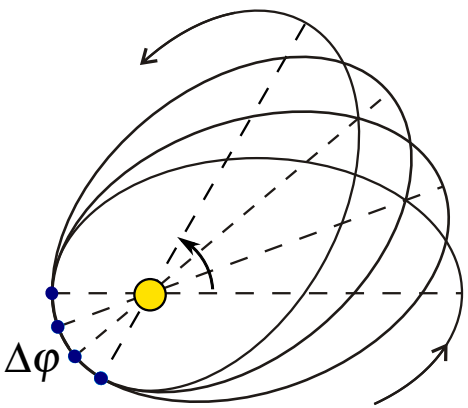
- Ausgerechnet sein wichtigster Förderer, Max Planck, äußert direkt nach der Rede massive Zweifel an dem Forschungsziel [Föl93, S. 386]
- Eine geplante Expedition deutscher Astronomen nach Russland zur experimentellen Messung der Lichtablenkung durch die Sonne scheitert wegen des Ausbruchs des Ersten Weltkriegs (aber auch am Wetter!).

Verlauf von Einsteins Forschungen 1914/1915

- Einstein führte seine theoretischen Betrachtungen dennoch intensiv weiter.
- Schon in seinen Vorträgen in den Sitzungen der Akademie am 19. und 29. Oktober 1914 stellte er einen Entwurf der formalen Grundlage einer allgemeinen Relativitätstheorie vor.
  - Er formulierte dort klar das ***Äquivalenzprinzip***, dass Beschleunigung und Gravitation physikalisch ununterscheidbar sind.
  - Er konnte unter bestimmten Bedingungen die Lichtablenkung und die Rotverschiebung elektromagnetischer Wellen im Gravitationsfeld abschätzen.
  - Aber: eine allgemeingültige und widerspruchsfreie Formulierung der Theorie war noch nicht gelungen.
- Noch im Sommer 1915 war er dennoch überzeugt, kurz vor dem Durchbruch zu sein.
- Er trug Ende Juni 1915 seinen Theorieentwurf dem Göttinger Mathematiker David Hilbert vor [Föl93, S. 420].

Scheitert die Theorie? Einsteins Testfall schlägt fehl

- Im Frühherbst 1915 stellte Einstein fest, dass sein Ansatz falsch sein musste und *„meine bisherigen Feldgleichungen der Gravitation gänzlich haltlos waren“*, da *„mein bisheriges Beweisverfahren ein trügerisches war“* [Föl93, S. 415]
- Die Berechnung der ***Periheldrehung des Merkur*** ergab einen zu kleinen Wert.
  - Der Merkur bewegt sich nicht auf einer Ellipse um die Sonne, sondern eine Rosettenbahn, deren sonnenächster Punkt („Perihel“) sich langsam verschiebt.
  - Die Periheldrehung wurde 1859 von dem Astronomen Urbain Le Verrier entdeckt und beträgt etwa $571{,}91''$ / Jahrhundert.
  - Davon konnte der größte Teil auf Störeinflüsse der anderen Planeten (vor allem Venus und Jupiter) zurückgeführt werden, aber ungeklärt blieb eine Diskrepanz von



Periheldrehung des Merkur

$$\Delta\varphi = 43{,}11'' \text{ / Jahrhundert} \tag{1}$$

  - Damit stellte die Periheldrehung des Merkur ein seit über 50 Jahren ungelöstes Problem der Himmelsmechanik dar.
- Einstein errechnete jedoch nur den Wert $\Delta\varphi = 18''$

Aus dem Fehler gelernt

- Einstein arbeitet im Oktober 1915 wie ein Besessener.
- Er erkennt seinen grundsätzlichen mathematischen Irrtum und formuliert seine Gleichungen nun ***„kovariant“***, d.h. mit einem Ableitungsbegriff, der die Krümmung des Raumes korrekt berücksichtigt.
- Im November 1915 geht es Schlag auf Schlag:

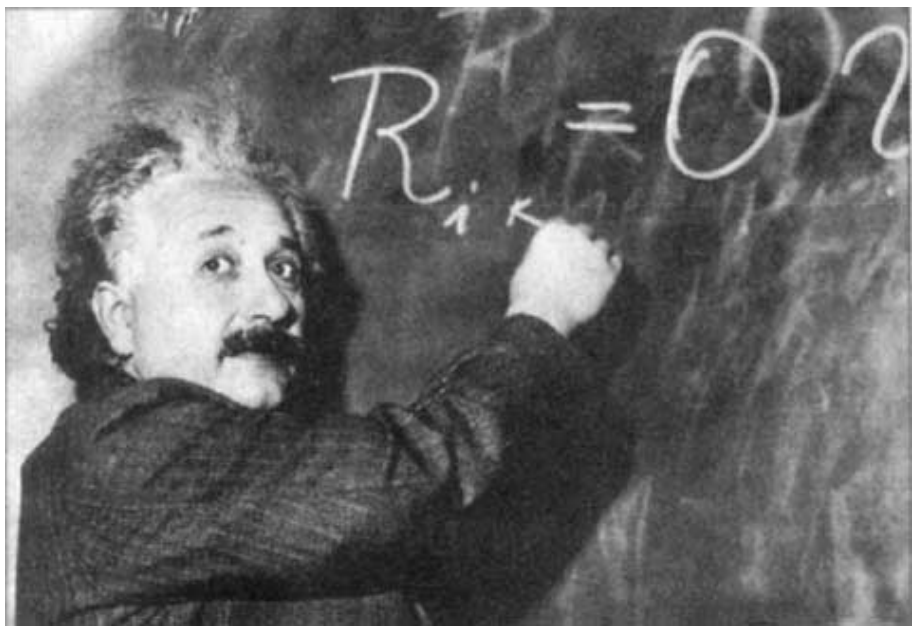
4./11. November:	Vortrag „Zur allgemeinen Relativitätstheorie“ in der Plenumssitzung der Akademie; (Hier präsentiert er mit Gleichung (16) bereits die Feldgleichungen, allerdings nur für Materie mit Energie-Impuls-Tensor $T_i^{\,i} = 0$.)
18. November:	Vortrag mit der korrekten näherungsweisen Herleitung der Periheldrehung des Merkur im Falle des Gravitationsfeldes der Sonne [Ein5b]
25. November:	Erstmals werden die Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie einem Publikum vorgestellt.

Donnerstag, der 25. November 1915

Einstein schreibt die Feldgleichungen an die Tafel des Sitzungssaals der Königlich-Preußischen Akademie der Wissenschaften in Berlin:

$$\boxed{R_{im} = -\kappa\left(T_{im} - \tfrac{1}{2}g_{im}T\right)}$$

mit $i,m = 1,2,3,4$ und der Konstanten $\kappa = 8\pi G/c^4$. [Ein5c, Gleichungen (2a) & (6)]



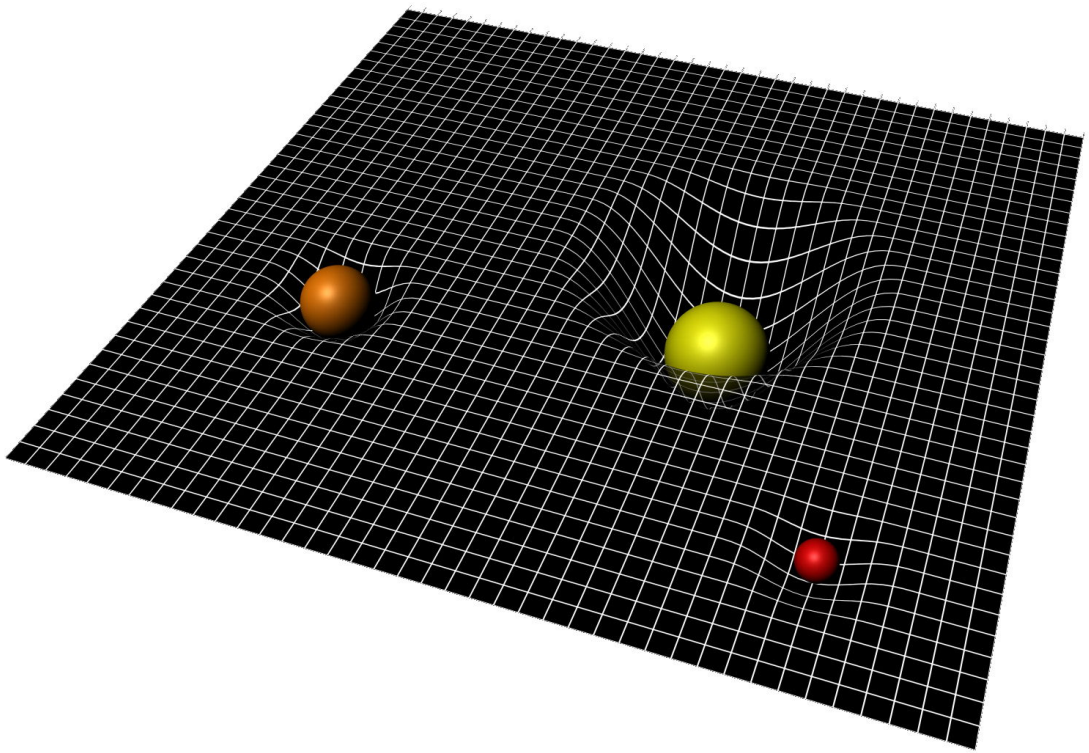
(Bildquelle: http://crazyhorsebooks.com/explanation-to-the-famous-einstein-picture-of-the-board/)

→ **Tondokument Einsteins zur Relativitätstheorie**

Die Einstein'schen Feldgleichungen

Grundidee der Feldgleichungen

Materie und Energie krümmen Raum und Zeit, andererseits bestimmt die Krümmung der Raumzeit die Bewegung und Verteilung von Materie und Licht. Durch diese Rekursion *müssen* die Feldgleichungen nichtlinear sein.



Bildquelle: http://www.esa.int/spaceinimages/Images/2015/09/Spacetime_curvature

Die Einstein'schen Feldgleichungen: Struktur

- Heute schreibt man die Feldgleichungen in anderer, aber äquivalenter Form:

$$\boxed{R_{ij} - \tfrac{1}{2} g_{ij} R = -\kappa T_{ij}}$$

  $(i,j = 1,2,3,4)$
- Die Größen g_{ij}, R_{ij} und T_{ij} sind hierbei ***„Tensoren 2. Ordnung"***, die für die 4-dimensionale Raumzeit in gegebenen Koordinaten durch symmetrische (4×4)-Matrizen darstellbar sind, also z.B.

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{31} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{pmatrix}$$

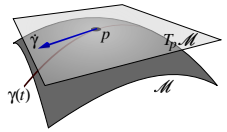
  mit $g_{ij} = g_{ji}$. Hier ist g der ***metrische Tensor***.
- R und die Komponenten des Tensors $R_{..}$ sind dabei Funktionen des Tensors $g_{..}$ und dessen partiellen Ableitungen bis zur Ordnung 2:

$$R_{ij} = R_{ij}\left(g_{..}, \frac{\partial g_{..}}{\partial x_k}, \frac{\partial^2 g_{..}}{\partial x_l \partial x_m}\right), \quad R = R\left(g_{..}, \frac{\partial g_{..}}{\partial x_k}, \frac{\partial^2 g_{..}}{\partial x_l \partial x_m}\right).$$

Die Einstein'schen Feldgleichungen: Geometrie und Physik

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = -\kappa T_{ij}$$

Geometrie **Physik**



- Auf der linken Seite der Feldgleichungen stehen nur Terme, die vom metrischen Tensor g_{ij} abhängen.
  - Er bestimmt die Abstände zwischen zwei Punkten der Raumzeit
- Die linke Seite ist also pure **Geometrie**, die rechte **Physik** (Verteilung von Massen und Energie).
- Üblich: Lege die Physik fest und suche nach einer Lösung für die Geometrie:

$$g_{ij} = g_{ij}(x_1, \ldots, x_4).$$

- Die Feldgleichungen sind daher ein System von 10 nichtlinearen Differentialgleichungen 2. Ordnung für die 10 Komponenten von g_{ij}.

→ **Videoclip zur ersten experimentellen Bestätigung der allgemeinen Relativitätststheorie 1919**

Vakuumlösungen

- Die einfachste Klasse exakter Lösungen der Einstein'schen Feldgleichungen sind die ***Vakuumlösungen***.
- Sie lösen die Feldgleichungen mit einem verschwindenden Energie-Impuls-Tensor, also

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

- Die Vakuumlösungen stellen damit Gravitationsfelder im Vakuum dar.
- Es waren zwei Vakuumlösungen, die als ersten exakte Lösungen entdeckt wurden: die Minkowski-Raumzeit und die Schwarzschildlösung.

Die Minkowski-Raumzeit

- Die einfachste Lösung der Feldgleichung ist die *Minkowski-Raumzeit* mit dem konstanten metrischen Tensor

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$

- Da alle Ableitungen von g_{ij} verschwinden, sind Raum und Zeit nicht gekrümmt.
- Insbesondere bewegen sich Lichtstrahlen hier auf Geraden, aber es existiert auch keine Gravitation.
- Die Minkowski-Raumzeit ist das Modell der speziellen Relativität.
- Selbstverständlich kannte Einstein diese „triviale“ Lösung seiner Feldgleichungen, er hatte diese ja bewusst so konstruiert, dass die Minkowski-Raumzeit sie löst („*Korrespondenzprinzip*“ zur speziellen Relativitätstheorie).

Die Schwarzschild-Lösung: Schwarze Löcher

- Im Frühjahr 1916 gelang es Karl Schwarzschild, die erste (nichttriviale) exakte Lösung für den Fall eines Vakuums außerhalb einer gegebenen Masse zu finden.
- Seine Lösung beschreibt in letzter Konsequenz ein Schwarzes Loch (... was man aber erst in den 1960er Jahren als mögliche physikalische Realität verstand.)
- Der die Feldgleichungen lösende metrische Tensor hat eine einfache Diagonalgestalt:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{rr} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{\vartheta\vartheta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{\varphi\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{tt} \end{pmatrix} \tag{4}$$

  t: Zeit, (r, ϑ, φ) räumlichen Kugelkoordinaten; es gilt $g_{ij} = g_{ij}(r)$.
- Die drei räumlichen Komponenten von g_{ij} haben dabei ein von g_{tt} verschiedenes Vorzeichen, und

$$g_{rr} = -\frac{1}{g_{tt}}. \tag{5}$$

- In den 1960er Jahren entdeckte Kerr eine verallgemeinerte Lösung, die nichtverschwindende Komponenten in der Nebendiagonale enthält
  $\Rightarrow$ rotierende Gravitationsquelle im Vakuum

Modelle des Weltalls

- Der Energie-Impuls-Tensor für eine ideale Flüssigkeit lautet

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho \end{pmatrix} \tag{6}$$

(p: Druck, ρ: Energiedichte)

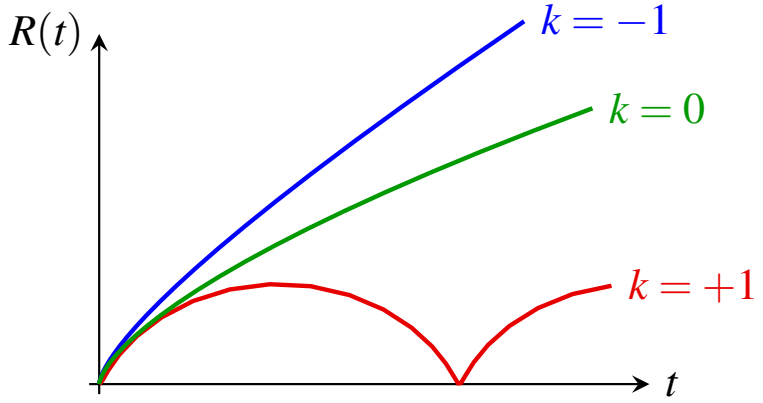
- Alexander Friedmann löste 1922 die Feldgleichungen für diesen Tensor mit zwei differenzierbaren Funktionen $p(t)$ und $\rho(t)$:

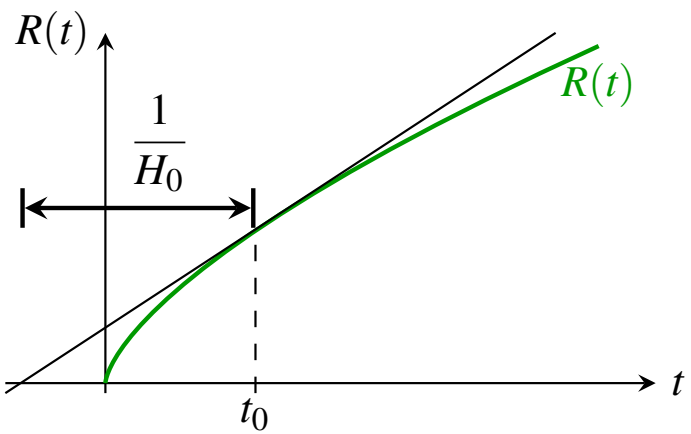
$$g_{ij} = \begin{pmatrix} -\dfrac{R^2(t)}{1-kr^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R^2(t)\,r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R^2(t)\,r^2 \sin^2\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$R(t)$: Weltradius, topologischer Parameter $k = -1, 0, +1$

Die drei Friedmann-Kosmen

- Der Parameter k nimmt drei Werte $-1, 0, +1$ an:
  - $k = -1, 0$: ein unendliches, sich für alle t ausdehnendes Weltall
  - $k = +1$: ein endliches, erst expandierendes und später kontrahierendes Weltall





- Die *Hubble-Funktion*

$$H(t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)},$$

ergibt zum Zeitpunkt $t_0 =$ jetzt das maximale Alter des Weltalls:

$$t_0 - t = \frac{1}{H_0} \qquad (\text{mit } H_0 = H(t_0))$$

- Zahlreiche Bestätigungen: Galaxienflucht (Hubble 1929), Hintergrundstrahlung (Penzias & Wilson 1965), Higgs-Boson (CERN 2012)

Das Olbers'sche Paradoxon

Satz (Olbers'sches Paradoxon (1823))

Wenn das Weltall räumlich und zeitlich unendlich und gleichförmig mit Sternen wie unsere Sonne erfüllt ist, so ist der Himmel überall mindestens so hell wie sie.

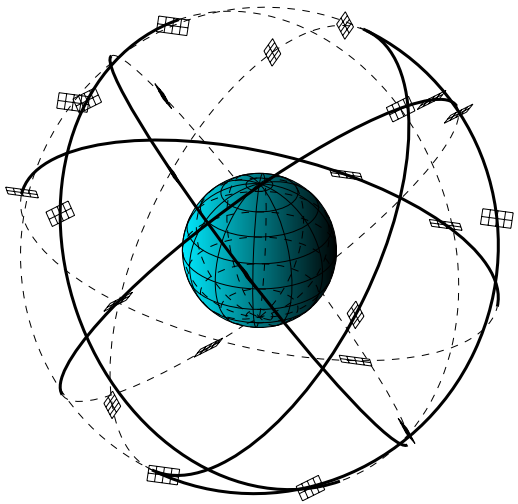
- Warum aber ist es dann nachts dunkel?
- Mindestens eine der drei Prämissen des Satzes muss falsch sein, damit er unserer Beobachtung nicht widerspricht:
  - das Weltall ist räumlich endlich,
  - das Weltall ist zeitlich endlich,
  - das Weltall ist nicht gleichförmig mit sonnenähnlichen Sternen erfüllt.
- Die Einstein'schen Feldgleichungen liefern erstmals in der Wissenschaftsgeschichte physikalisch testbare kosmologische Modelle, die das Olbers'sche Paradoxon lösen:

Auflösung des Paradoxons gemäß der allgemeinen Relativität

Die Friedmann-Modelle implizieren ein zeitlich endliches Universum.

GPS

- GPS ist ein globales satellitengestütztes Navigationssystem zur Positionsbestimmung.



(Bildquelle: http://tug.org/TUGboat/tb33-1/tb103wolcott.pdf)

- Die Satelliten strahlen hierfür mit codierten Radiosignalen ständig ihre aktuelle Position und die genaue Uhrzeit aus.
- Aus den Signallaufzeiten können GPS-Empfänger dann ihre eigene Position und die Geschwindigkeit berechnen.
- GPS wurde im Februar 1978 gestartet und basiert auf 31 Satelliten.

GPS: Ohne Relativitätstheorie nur bedingt zu gebrauchen

- Die Ganggeschwindigkeiten einer Uhr („Eigenzeit“ τ_E) auf der Erde und einer Satellitenuhr (τ_S) unterscheiden sich in guter Näherung durch [SW13, Gl. (14.12)]:

$$\frac{\mathrm{d}\tau_S}{\mathrm{d}\tau_E} \approx 1 + \frac{\Delta\Phi}{c^2} - \frac{\Delta v^2}{2\,c^2}.$$

- Der erste Effekt ist die ***gravitative Zeitdilatation*** und ergibt sich aus der Differenz $\Delta\Phi$ der Gravitationspotenziale auf der Erde und in der Satellitenbahn.
- Der zweite Effekt ist die ***speziell-relativistische Zeitdilatation*** und ergibt sich aus der Differenz Δv^2 der Geschwindigkeitsquadrate von Erdempfänger und Satellit.
- Die beiden Effekte sind gegenläufig. Für GPS mit Satelliten in einer Höhe von ca. 20 000 km überwiegt die gravitative Zeitdilatation um das 6-fache!

$$\frac{\mathrm{d}\tau_S}{\mathrm{d}\tau_E} = 1 + 4{,}44 \cdot 10^{-10}$$

- Die Satellitenuhren gehen also schneller als auf der Erde: 0,014 s pro Jahr
- Ohne Korrektur führt das zu einem Fehler von 13 cm/s, also 8 Meter pro Minute.

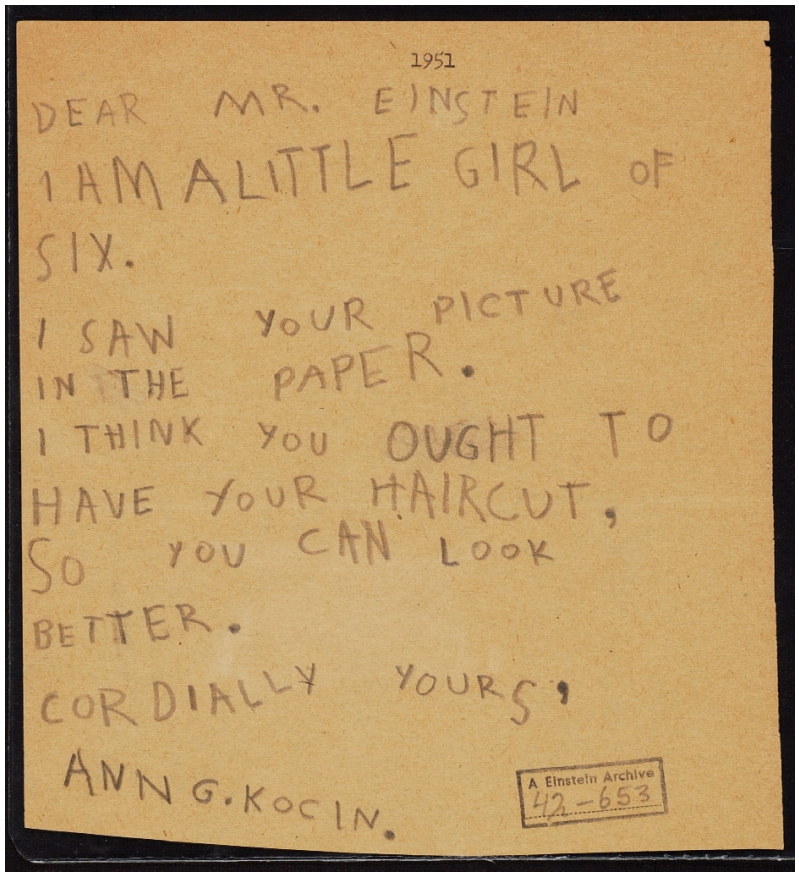
Was lernen wir aus alledem?

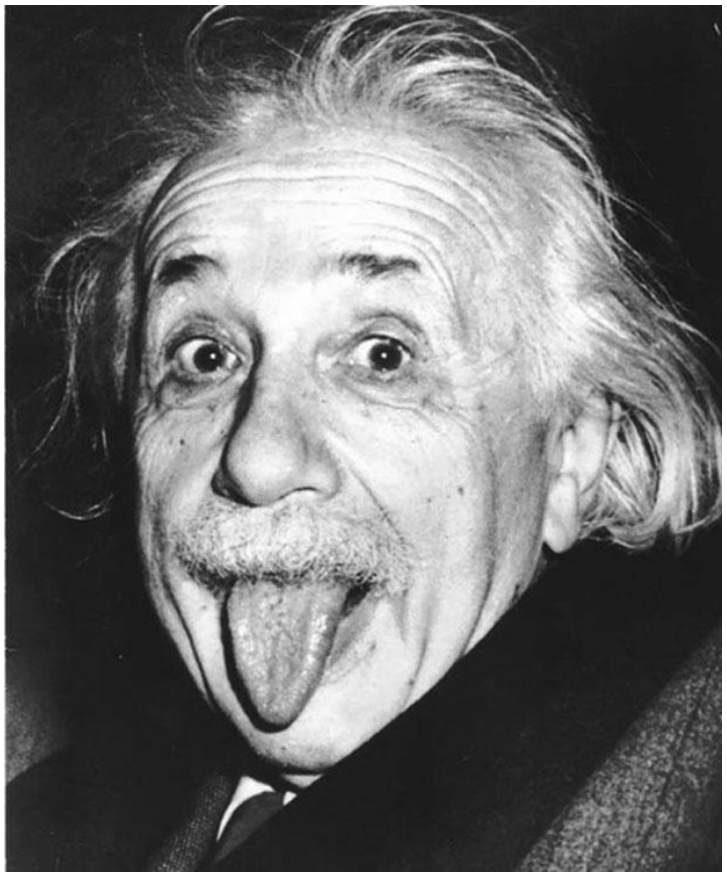
- Heute vor 100 Jahren vollendete Albert Einstein praktisch im Alleingang eine ästhetisch wundervolle Theorie der Gravitation.
- Sie liefert bis heute das genaueste Modell der makroskopischen Welt, das wir kennen.
- Wie jede Theorie in der Physik ist die allgemeine Relativitätstheorie eine „Brille“, mit der wir Aspekte der Welt um uns erkennen und einordnen können.
  - Mit ihr können wir Beobachtungsdaten als Schwarze Löcher oder dynamische Universen interpretieren.
  - Wir können sie konsequent weiterdenken und „realistisch“ über Gravitationswellen, Wurmlöcher, Warp-Antriebe oder Zeitreisen spekulieren.
- Wie jede Theorie hat aber auch die Relativitätshtheorie ihren Gültigkeitsbereich, sie ist „blind“ für die mikroskopische Welt der Elementarteilchen und der Quanteneffekte.
- Wenn die Theorie nun aber *falsch* ist, so *muss* ihr einziges Axiom falsch sein, das Äquivalenzprinzip.
  - Entweder sind träge und schwere Masse nicht gleich
  - oder wir leben nicht in einer vierdimensionalen Raumzeit.

Aber was ist eigentlich *wirklich* wichtig?

Albert Einstein am 25. November 1915:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = -\kappa T_{ij}$$





Literatur

CLARK, Ronald W.:
Albert Einstein. Leben und Werk.
Herbig Sonderausgabe 1979.
Esslingen : Bechtle, 1974

EINSTEIN, Albert:
'Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie'.
In: *Sitzungsber. Königl. Preuß. Akad. Wiss., phys.-math. Klasse* II (1915b), S. 831–839. –
`http://adsabs.harvard.edu/abs/1915SPAW.....831E`

EINSTEIN, Albert:
'Die Feldgleichungen der Gravitation'.
In: *Sitzungsber. Königl. Preuß. Akad. Wiss., phys.-math. Klasse* II (1915c), S. 844–847. –
`http://adsabs.harvard.edu/abs/1915SPAW.....844E`

FÖLSING, Albrecht:
Albert Einstein. Eine Biographie.
Frankfurt : Suhrkamp, 1993

JANSSEN, Michael ; RENN, Jürgen:
'Einsteins Weg zur allgemeinen Relativitätstheorie'.
In: *Spektrum der Wissenschaft* 10 (2015), S. 49–55. –
`http://spektrum.de/artikel/1362267`

SONNE, Bernd ; WEISS, Reinhard:
Einsteins Theorien. Spezielle und Allgemeine Relativitätstheorie für Einsteiger und zur Wiederholung.
Berlin Heidelberg : Springer Spektrum, 2013

Weblinks

[DE] http://www.deutschlandfunk.de/allgemeine-relativitaetstheorie-der-wertvollste-fund-meines.740.de.html?dram:article_id=319747 – Dokumentation des Deutschlandfunks über Bedeutung und Entstehungsgeschichte der allgemeinen Relativitätstheorie.

[dV] http://haegar.fh-swf.de/spielwiese/ART/100-Jahre-ART.pdf – Andreas de Vries (2015): *100 Jahre allgemeine Relativitätstheorie*. Entstehungsgeschichte und Bedeutung der Einstein'schen Feldgleichungen, ausgearbeitet anlässlich der Festvorlesung der FH Südwestfalen in Hagen am 25. November 2015

[EA] http://www.alberteinstein.info/ – Einstein Archives Online. Informationen und Digitalisate von Einsteins Notizen und Schriften.

[EJ] http://www.einsteinjahr.de/ – Einsteinjahr 2005. Informationen über Einstein und sein Werk, initiiert von der deutschen Bundesregierung, Wissenschaft, Wirtschaft und Kultur

[EO] http://www.einstein-online.info/ – Webportal mit allgemeinverständlichen Informationen zu Einsteins Relativitätstheorien, gestaltet vom Max-Planck-Institut für Gravitationsphysik

[sc] http://www.3sat.de/mediathek/?mode=play&obj=55091 – scobel: „Einsteins Irrtümer", 3sat Mediathek vom 5.11.2015

Fragen im Anschluss an die Festvorlesung

- Nach einem Hinweis wurden die Tippfehler bei den Indizes korrigiert.
- Warum altert bei dem Zwillingsparadoxon (in der Standardformulierung) nicht der Zwilling auf der Erde aus Sicht des reisenden Zwillings? *Antwort:* Da der reisende Zwilling dreimal beschleunigt, nämlich beim Start, beim Wenden und bei der Landung, erlebt und berechnet er konsistent dieselbe Altersdifferenz wie sein Zwillingsbruder im unveränderlichen Schwerefeld der Erde.
- Würden sich negative Massen mit Überlichtgeschwindigkeit bewegen können? *Antwort:* Nein, sie würden sich aber von den positiven Massen abstoßen und andere negative Massen anziehen (denn das durch die Schwarzschild-Lösung erzeugte Gravitationspotential wäre positiv.) Großräumig könnte sich so die Gravitation ähnlich wie die elektrische Ladung neutralisieren. Allerdings gibt es darüber noch theoretische Unklarheiten, siehe
  `https://en.wikipedia.org/wiki/Negative_mass#Runaway_motion`.
- Wie ist das Schwerefeld im Mittelpunkt der Erde? *Antwort:* In einer homogenen Kugel konstanter Dichte neutralisiert sich die Anziehungskraft, da in jede Richtung stets dieselbe Kraft nach außen wirkt. (siehe
  `https://de.wikipedia.org/wiki/PREM`)