

100 Jahre Allgemeine Relativitätstheorie

Entstehungsgeschichte und Bedeutung von Einsteins Modell der Gravitation

Andreas de Vries

25. November 2015

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	4
2	Die Feldgleichungen	5
2.1	Entstehungsgeschichte	5
2.1.1	Die Königlich-Preußische Akademie der Wissenschaften	5
2.1.2	Einstein und sein Forschungsvorhaben	6
2.1.3	Der Prioritätenstreit zwischen Einstein und Hilbert	10
2.2	Bedeutung der Feldgleichungen	10
2.3	Die erste Bestätigung durch Beobachtung	12
3	Exakte Lösungen der Feldgleichungen	14
3.1	Vakuumlösungen	14
3.1.1	Die Minkoski-Raumzeit der speziellen Relativität	14
3.1.2	Schwarze Löcher	15
3.2	Nichtverschwindende Energie-Impuls-Tensoren	16
3.2.1	Modelle des Weltalls	16
4	Die allgemeine Relativität im Alltag	19
4.1	Das Olbers'sche Paradoxon	19
4.2	GPS	20
5	Die logische Basis der allgemeinen Relativitätstheorie	23
5.1	Das Äquivalenzprinzip	25
5.2	Konsequenzen des Äquivalenzprinzips	25
5.2.1	Gleichheit von träger und schwerer Masse	25
5.2.2	Gravitationsfelder krümmen die Raumzeit	26
5.2.3	Mathematische Formulierung des Äquivalenzprinzips	27
5.2.4	Die gravitative Rotverschiebung	29
6	Epilog	31

Appendix	32
A Mathematische Erläuterungen	34
A.1 Differentialgeometrische Grundlagen	34
A.1.1 Mannigfaltigkeiten und Karten	34
A.1.2 Tensorfelder	36
A.1.3 Der metrische Tensor und die Krümmungstensoren	37
A.1.4 Raumzeiten als vierdimensionale Mannigfaltigkeiten	47
A.1.5 Singularitäten	50
A.2 Beweis der Äquivalenz von (2.1) und (2.2)	56
Literaturverzeichnis	60

Kapitel 1

Einleitung

Am Donnerstag, den 25. November 1915, stellte Albert Einstein in einer Sitzung der Königlich-Preußischen Akademie der Wissenschaften in Berlin die Feldgleichungen seiner Gravitationstheorie vor. Er bringt damit ein Jahrzehnt seiner intensiven Forschung nach einer „allgemeinen Relativitätstheorie“ zum Abschluss. Sein

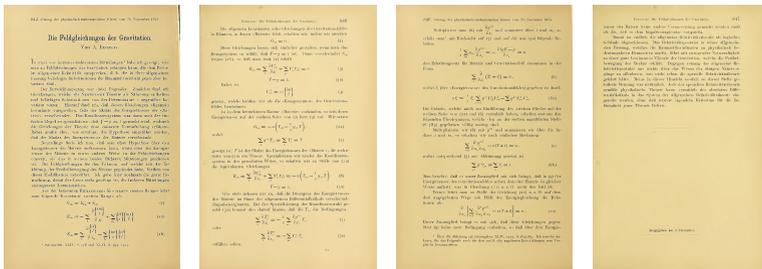


Abbildung 1.1: Faksimile des Artikels „Die Feldgleichungen der allgemeinen Relativitätstheorie“ (Quelle: Astrophysics Data System, Harvard University)

Vortrag wird als Sitzungsbericht wenige Wochen später auf vier Seiten veröffentlicht [15]. Die Feldgleichungen sind dort die Gleichungen (2a), siehe Abbildung 1.1. Einstein benutzte hier die Bezeichnung G_{im} für den heute so genannten Ricci-Tensor R_{im} . (Was Einstein damals R_{im} nannte, ist einfach nur eine Teilsumme des Ricci-Tensors und ohne weitere Bedeutung.)

Kapitel 2

Die Feldgleichungen

2.1 Entstehungsgeschichte

2.1.1 Die Königlich-Preußische Akademie der Wissenschaften

Die Königlich-Preußische Akademie der Wissenschaften war eine staatliche Forschungsanstalt. Sie wurde von Leibniz am 11. Juli 1700 als *Kurfürstlich-Brandenburgische Societät der Wissenschaften* unter dem Kurfürsten Friedrich III. gegründet und nach einer tiefgreifenden Reorganisation im Jahre 1812 umbenannt. Seit 1914



Abbildung 2.1: Gebäude der Staatsbibliothek, in dessen Westflügel sich ab 1914 die Königlich-Preußische Akademie der Wissenschaften. Links: 1920er Jahre, rechts heute. (Bildquellen: Staatsbibliothek Berlin,

war sie im Westflügel des Innenhofs der neu errichteten Staatsbibliothek Unter den Linden 8 untergebracht. Um ordentliches Mitglied der Akademie zu werden, musste man von den ordentlichen Mitgliedern zugewählt („kooptiert“) werden. Ab 1815 förderte sie hauptsächlich wissenschaftliche Unternehmungen, die von Kommissionen unter Vorsitz eines ordentlichen Mitglieds geleitet wurden. Förderungsanträge

konnte jedes ordentliche Mitglied beantragen.

Die Akademie war seit 1830 in die physikalisch-mathematische Klasse und die philosophisch-historische Klasse gegliedert. Allwöchentlich versammelten sich die etwa 50 ordentlichen Mitglieder zu ihren Sitzungen in den beiden Klassen oder im Plenum [16, S. 381]. Die Sitzungen wurden protokolliert und als Sitzungsberichte veröffentlicht.

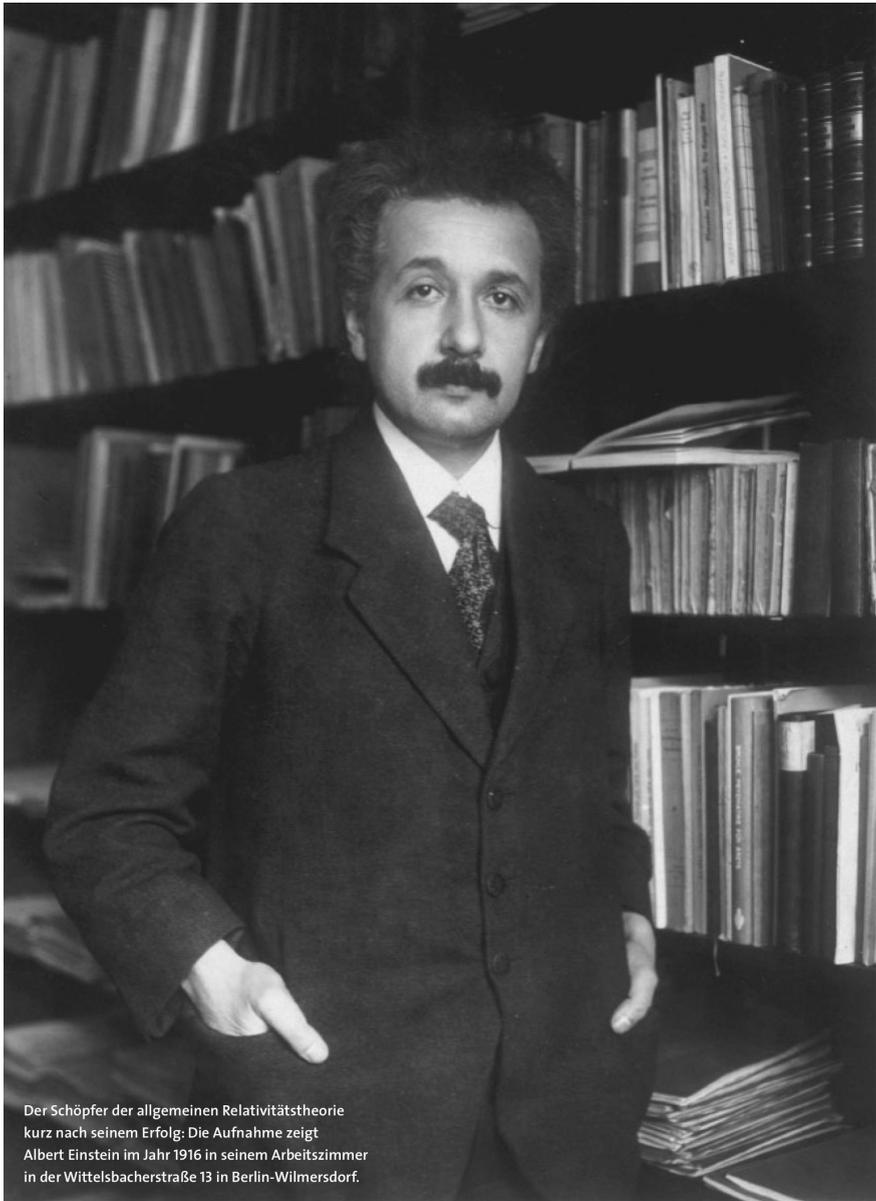
2.1.2 Einstein und sein Forschungsvorhaben

Einstein, seit WS 1912/13 Professor an der ETH in Zürich [7, S. 113], wurde am 12. Juli 1913 durch die ordentlichen Mitglieder Max Planck und Walther Nernst eine Forschungsstelle an der Akademie und eine Professur ohne Lehrverpflichtung an der Berliner Universität angeboten [7, S. 124ff], [16, S. 372]. Im Dezember 1913 nahm Einstein das Angebot formell an und trat die Stelle zum 1. April 1914 im Alter von gerade 35 Jahren als ordentliches Mitglied der Akademie an [7, , S. 128]. Nach § 14 des am 13. Juli 1913 in Kraft getretenen Staatsbürgerschaftsgesetzes, gemäß dem eine Übernahme in den Staatsdienst die deutsche Staatsbürgerschaft verlieh [7, S. 128], erlangte Einstein damit automatisch die deutsche Staatsbürgerschaft, neben seiner schweizerischen, die er auf keinen Fall ablegen wollte. Am 2. Juli 1914 hielt er seine Antrittsrede vor der Akademie [7, S. 129].

Seit ihrer Veröffentlichung im Jahr 1905 war Einstein intensiv damit beschäftigt, die Spezielle Relativitätstheorie zu verallgemeinern und sie zu einer Gravitationstheorie zu entwickeln. Ende 1913 waren seine Forschungen dazu jedoch ziemlich festgefahren. Er erhoffte sich wichtige Einsichten durch astronomische Beobachtungen, die die Ablenkung von Lichtstrahlen in einem Gravitationsfeld belegen oder widerlegen könnten. Eine günstige Gelegenheit dazu bot die totale Sonnenfinsternis am 21. August 1914, die auf der Krim beobachtbar sein würde [16, S. 386, 401]. Die Potsdamer Sternwarte plante unter Leitung des Astronomen Erwin Finlay-Freundlich eine Expedition dorthin [7, S. 120].

Einstein legte in der Antrittsrede vor der Akademie sein Forschungsprogramm klar dar, an der Verallgemeinerung seiner Speziellen Relativitätstheorie zu arbeiten und die theoretischen Vorhersagen experimentell zu überprüfen, „was die Anspannung aller Kräfte erfordert“ [7, S. 129]. Dennoch schimmern seine tiefen Zweifel am Erfolg seiner Unternehmung in seiner Rede durch: „Sie haben es mir durch die Berufung an Ihre Akademie ermöglicht, mich frei von den Aufregungen und Sorgen eines praktischen Berufes ganz den wissenschaftlichen Studien zu widmen. Ich bitte Sie, von meinem Gefühl der Dankbarkeit und der Emsigkeit meines Strebens auch dann überzeugt zu sein, wenn Ihnen die Früchte meiner Bemühungen als ärmliche erscheinen werden.“ (zitiert nach [7, S. 129]) Ausgerechnet Einsteins wichtigster Förderer, Max Planck, äußerte im Anschluss an die Antrittsrede öffentlich massive Zweifel an dem Forschungsziel einer verallgemeinerten Relativität [16, S. 386].

Ein weiterer schwerer Rückschlag für sein Forschungsprogramm war der Aus-



Der Schöpfer der allgemeinen Relativitätstheorie kurz nach seinem Erfolg: Die Aufnahme zeigt Albert Einstein im Jahr 1916 in seinem Arbeitszimmer in der Wittelsbacherstraße 13 in Berlin-Wilmersdorf.

AGC/IMAGES/PANORAMIC

Abbildung 2.2: Einstein 1916. (Bildquelle: [23])

bruch des Ersten Weltkriegs am 1. August 1914, durch den die geplante Russlandexpedition zur Sonnenfinsternis nicht stattfinden konnte [7, S. 120].

Einstein führte seine theoretischen Betrachtungen dennoch, oder gerade deswegen, intensiv weiter. Schon in seinen Vorträgen in den Sitzungen am 29. Oktober und 19. November 1914 stellte er einen Entwurf der formalen Grundlage einer allgemeinen Relativitätstheorie vor. Er konnte damit zwar bereits unter bestimmten Bedingungen die Lichtablenkung und die Rotverschiebung elektromagnetischer Wellen im Gravitationsfeld abschätzen. Aber eine allgemeingültige Formulierung der Theorie konnte er noch nicht liefern. Ganz offen beschrieb er die formalen Lücken seines Entwurfs, die vor allem durch ein noch ungenügend verstandenes mathematisches Instrumentarium begründet waren [16, S. 404]. Dennoch war er noch im Sommer 1915 überzeugt, im Prinzip bereits die endgültige Fassung der Theorie erreicht zu haben [16, S. 414]. Um sich mathematische Unterstützung zu holen, trug er Ende Juni 1915 seinen Theorieentwurf dem Göttinger Mathematiker David Hilbert vor, einem der weltweit bedeutendsten Mathematiker zu jener Zeit. Einstein wohnte in diesen Tagen bei den Hilberts, und er wird mit Hilbert intensiv über Physik und die Relativitätstheorie diskutiert haben [16, S. 420].

Spätestens Anfang Oktober 1915 erkannte Einstein jedoch, „dass meine bisherigen Feldgleichungen der Gravitation gänzlich haltlos waren“, da „mein bisheriges Beweisverfahren ein trügerisches war“ [16, S. 415]. Bis dahin nahm er immer an, seine Version der Feldgleichungen würden auch für ein gleichförmig rotierendes Bezugssystem gelten. Als er es aber zum ersten Male im Herbst 1915 endlich durchrechnete, brach sein Ansatz zusammen: Die Feldgleichungen in dieser Version verletzen die Rotationssymmetrie. Zum zweiten lieferten seine Gleichungen einen viel zu kleinen Wert für die Periheldrehung des Merkur, eines seit der Entdeckung des Astronomen Urbain Le Verrier im Jahre 1859 ungelöstes Problem der Himmelsmechanik. Entgegen der klassischen Newton'schen Gravitationstheorie bewegt sich

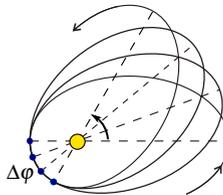


Abbildung 2.3: Die Periheldrehung des Merkur.

der Merkur nicht auf einer geschlossenen Ellipse, sondern auf einer Rosettenbahn, so dass der Perihel, also der sonnennächste Punkt der Umlaufbahn, bei jedem Umlauf langsam vorrückt. Einstein errechnete eine Periheldrehung des Merkur von 18 Bogensekunden pro Jahrhundert, Le Verrier hatte aber 45 Bogensekunden beobachtet.

Einstein muss im Oktober 1915 wie ein Besessener gearbeitet haben [16, S.

416]. Er erkennt seinen grundsätzlichen mathematischen Irrtum und formuliert seine Gleichungen nun „kovariant“, d.h. heißt unter einem Ableitungsbegriff der Riemann'schen Differentialgeometrie, der die Krümmung des Raumes korrekt berücksichtigt.

Im November ging es dann Schlag auf Schlag. Für die Plenarsitzung am Donnerstag, den 4. November 1915, kündigte er einen Vortrag „Zur allgemeinen Relativitätstheorie“ an und setzte ihn eine Woche später in der Sitzung der Klasse fort. Er legte dort seinen fundamentalen mathematischen Irrtum in aller Offenheit dar, die Gleichungen nicht kovariant formuliert zu haben. Bereits 1912 hatte er in Zürich mit seinem Freund Marcel Grossmann versucht, die Kovarianz in seine Theorie einzubauen; allerdings gaben sie das Vorhaben auf, obwohl sie, ohne es zu wissen, ganz dicht bei der korrekten Formulierung waren.

In der Sitzung am 18. November leitete er die Periheldrehung des Merkur als Näherungslösung aus seinem Ansatz her. Dabei entdeckte er, dass in zweiter Näherung die Krümmung des Raumes eine wesentliche Rolle spielte. In der Woche darauf schließlich präsentierte er erstmals die allgemeine Formulierung der Feldgleichungen [15, Gleichungen (2a) und (6)]:¹

$$R_{im} = -\kappa(T_{im} - \frac{1}{2}g_{im}T) \quad (2.1)$$

Die Allgemeine Relativitätstheorie war am Donnerstag, den 25. November 1915, geboren [16, S. 419].

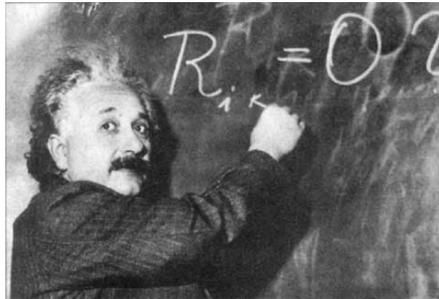


Abbildung 2.4: Einstein schreibt den Ricci-Tensor an die Tafel. Aufnahme vom 14. Januar 1931 in der Bibliothek des Mount Wilson Observatoriums in Pasadena, Kalifornien. (Quelle: <http://crazyhorsebooks.com/explanation-to-the-famous-einstein-picture-of-the-board/>)

„Damit ist endlich die allgemeine Relativitätstheorie als logisches Gebäude abgeschlossen. Das Relativitätspostulat in seiner allgemeinsten

¹ Die allgemeinen Feldgleichungen sind an sich nur in Gleichung (2a) formuliert, dort allerdings mit der Bezeichnung G_{im} statt, wie später üblich, mit dem Ricci-Tensor R_{im} . Da es am Ende nur Buchstaben für Variablen sind, die hier ausgetauscht wurden, die Formel (2.1) aber tatsächlich als Gleichung (6) von Einstein an diesem Tag aufgeschrieben wird, sei diese leichte Verfälschung verziehen.

Fassung, welches die Raumzeitkoordinaten zu physikalisch bedeutungslosen Parametern macht, führt mit zwingender Notwendigkeit zu einer ganz bestimmten Theorie der Gravitation, welche die Perihelbewegung des Merkur erklärt. Dagegen vermag das allgemeine Relativitätspostulat uns nichts über das Wesen der übrigen Naturvorgänge zu offenbaren, was nicht schon die spezielle Relativitätstheorie gelehrt hätte.”

Albert Einstein am 25. November 1915, [15, S. 847]

„Noch etwas anderes habe ich aus der Gravitationstheorie gelernt: Eine noch so umfangreiche Sammlung empirischer Fakten kann nicht zur Aufstellung so verwickelter Gleichungen führen. Eine Theorie kann an der Erfahrung geprüft werden, aber es gibt keinen Weg von der Erfahrung zur Aufstellung einer Theorie. Gleichungen von solcher Kompliziertheit wie die Gleichungen des Gravitationsfeldes können nur dadurch gefunden werden, dass eine logisch einfache mathematische Bedingung gefunden wird, welche die Gleichungen völlig oder nahezu determiniert. Hat man aber jene hinreichend starken formalen Bedingungen, so braucht man nur wenig Tatsachenwissen für die Aufstellung der Theorie; bei den Gravitationsgleichungen ist es die Vierdimensionalität und der symmetrische Tensor als Ausdruck für die Raumstruktur, welche zusammen mit der Invarianz bezüglich der Transformationsgruppe die Gleichungen praktisch vollkommen determinieren.”

Albert Einstein, zitiert nach [41, S. 138]

2.1.3 Der Prioritätenstreit zwischen Einstein und Hilbert

Bereits am 20. November 1915, also fünf Tage vor der Sitzung der Akademie, reichte Hilbert eine Mitteilung an die „Königliche Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen“ ein, die die Feldgleichungen herleitete. Allerdings erschien die Arbeit erst im März 1916, und erste Druckfahnen mit Datumsstempel 6. Dezember 1915 zeigen, dass die von Hilbert vorgeschlagene Theorie zu dem damaligen Zeitpunkt noch der falschen Entwurfstheorie näher stand als Einsteins neuer Theorie. Hilbert selbst hat auch nie Anspruch auf Entdeckung der Feldgleichung erhoben, was in den ereignisreichen Tagen um und kurz nach dem 25. November Einsteins große Sorge war [23, S. 54].

2.2 Bedeutung der Feldgleichungen

Heute schreibt man die Feldgleichungen oft nicht in Einsteins originaler Formulierung, sondern in der äquivalenten Form:

$$R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = -\kappa T_{ij} \quad (2.2)$$

mit der heute so genannten *Einstein-Konstanten* $\kappa = 8\pi G/c^4$ [14, Gleichung (89)]. Die Größen g_{ij} , R_{ij} und T_{ij} sind hierbei „*Tensorfelder 2. Stufe*“, die für die 4-dimensionale Raumzeit in gegebenen Koordinaten in jedem Raumzeitpunkt durch symmetrische (4×4) -Matrizen darstellbar sind, also z.B.

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{31} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{pmatrix}$$

mit $g_{ij} = g_{ji}$. Sowohl R als auch die Komponentent des Tensors $R_{..}$ sind dabei Funktionen des Tensors $g_{..}$ und dessen ersten und zweiten partiellen Ableitungen nach x_1, x_2, x_3 und x_4 :

$$R_{ij} = R_{ij} \left(g_{..}, \frac{\partial g_{..}}{\partial x_k}, \frac{\partial^2 g_{..}}{\partial x_l \partial x_m} \right), \quad R = R \left(g_{..}, \frac{\partial g_{..}}{\partial x_k}, \frac{\partial^2 g_{..}}{\partial x_l \partial x_m} \right).$$

Die zentrale Größe auf der linken Seite der Gleichung (2.2) ist also g_{ij} , der *metrische Tensor*. Er bestimmt die lokalen Abstände zwischen zwei Punkten der Raumzeit, also die „*Metrik*“ der Raumzeit. Der Tensor ist damit eine rein geometrische Größe und bestimmt indirekt auch die Krümmung der Raumzeit.

Auf der linken Seite der Feldgleichungen stehen also nur Terme, die die *Geometrie* der Raumzeit beschreiben, also die Krümmungen von Raum und Zeit. Der Tensor T_{ij} auf der rechten Seite, der „*Energie-Impuls-Tensor*“, beschreibt dagegen die *Physik*, also die Verteilung von Energie und Materie in der Raumzeit.

$$\underbrace{R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R}_{\text{Geometrie}} = \underbrace{-\kappa T_{ij}}_{\text{Physik}} \quad (2.3)$$

Üblicherweise legt man die Physik eines zu betrachtenden Gravitationssystems fest, also die Komponenten T_{ij} , und sucht nach einer Lösung für die Geometrie, also für die Komponenten

$$g_{ij} = g_{ij}(x_1, \dots, x_4).$$

des metrischen Tensors. Die Feldgleichungen sind daher ein System von 10 nichtlinearen Differentialgleichungen 2. Ordnung für die 10 Komponenten von g_{ij} .

Insgesamt kann man also die Grundidee der Feldgleichungen wie folgt zusammenfassen: *Materie und Energie krümmen Raum und Zeit, andererseits bestimmt die Krümmung der Raumzeit die Bewegung und Verteilung von Materie und Licht. Durch diese Rekursion müssen die Feldgleichungen nichtlinear sein.* Dabei hängt der Grad der Krümmung von der Größe der beteiligten Massen und Energien ab, je größer eine Masse, desto größer auch die Krümmung (Abbildung 2.5).

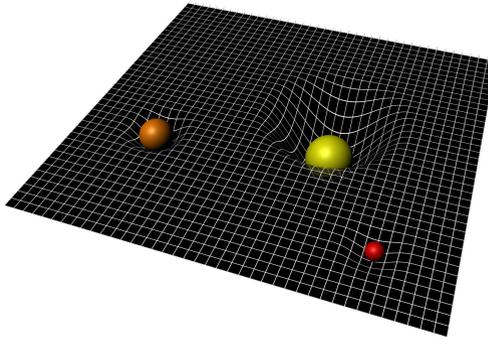


Abbildung 2.5: Masse und Energie krümmen die Raumzeit, die Krümmung der Raumzeit bestimmt umgekehrt die Verteilung von Masse und Energie. Bildquelle: http://www.esa.int/spaceinimages/Images/2015/09/Spacetime_curvature

2.3 Die erste Bestätigung durch Beobachtung

Auf Initiative des britischen Astronomen Arthur Eddington, der trotz der Isolation deutscher Wissenschaftler schon während des Weltkrieges über niederländische Physiker von Einsteins neuer Theorie erfahren hatte, gelang es mit zwei Expeditionen, die totale Sonnenfinsternis am 29. Mai 1919 im Norden Brasiliens und eine an der Westküste Afrikas zu beobachten. Sie kehrten mit mehreren Photographien der Sterne in Sonnenumgebung zurück, wovon wegen schlechten Wetters jedoch nur wenige auswertbar waren. Das Ergebnis der Messungen konnte knapp ein halbes Jahr später, am 6. November 1919 veröffentlicht werden [16, S. 444f, 492ff]. Es war ein Triumph für Einsteins Theorie. Die Ablenkung von 1,75 Bogensekunden am Sonnenrand, die Einstein vorhergesagt hatte, wurde bestätigt [4, S. 309].

Die Nachricht verbreitete sich blitzartig um die Welt, Einstein wurde praktisch über Nacht zu einem internationalen Popstar. Das gewaltige öffentliche Echo war einerseits der Faszination geschuldet, dass eine gänzlich neue und dem Alltagsdenken radikal widersprechende Theorie glänzend bestätigt worden war. Andererseits

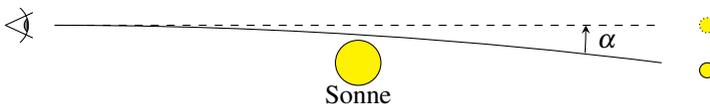


Abbildung 2.6: Lichtablenkung durch die Sonne. Bei einer Sonnenfinsternis erscheinen Sterne in scheinbarer Sonnennähe von ihr weg verschoben. Dieser Effekt ist nur bei totalen Sonnenfinsternissen beobachtbar.

traf die Nachricht aber sicher auch die Friedenssehnsucht der Weltöffentlichkeit nach der furchtbaren und bis dahin ungekannten industrialisierten Gewalt des ge-

rade erst beendeten Weltkrieges, denn immerhin wurde hier die Theorie eines deutschen Wissenschaftlers (und schweizerischen Staatsbürgers) ausgerechnet von einem britischen Wissenschaftsteam bestätigt: Ein Signal für die internationale und friedensstiftende Wirkung von Wissenschaft.

Kapitel 3

Exakte Lösungen der Feldgleichungen

3.1 Vakuumlösungen

Die einfachste Klasse exakter Lösungen der Einstein'schen Feldgleichungen (2.2) sind die *Vakuumlösungen*. Sie lösen die Feldgleichungen mit einem verschwindenden Energie-Impuls-Tensor, also

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Die Vakuumlösungen stellen damit Gravitationsfelder im Vakuum dar. Da die Feldgleichungen mit (3.1) verhältnismäßig einfach zu lösen sind, waren es zwei Vakuumlösungen, die als ersten exakte Lösungen entdeckt wurden: die Minkowski-Raumzeit und die Schwarzschildlösung.

3.1.1 Die Minkowski-Raumzeit der speziellen Relativität

Die einfachste Lösung der Feldgleichung ist die *Minkowski-Raumzeit*. Ihr metrischer Tensor ist konstant

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Da alle Ableitungen von g_{ij} verschwinden, sind Raum und Zeit nicht gekrümmt. Insbesondere bewegen sich Lichtstrahlen hier auf Geraden, aber es existiert auch keine Gravitation. Die Minkowski-Raumzeit ist das Modell der speziellen Relativität. Selbstverständlich kannte Einstein diese triviale Lösung seiner Feldgleichungen, er hatte sein Gleichungssystem bewusst so konstruiert, dass die Minkowski-Raumzeit sie lösen („Korrespondenzprinzip“).

3.1.2 Schwarze Löcher

Einstein selber konnte keine nichttriviale exakte Lösung seiner Feldgleichungen bestimmen. Aber nur wenige Monate nach ihrer Veröffentlichung gelang es dem Astronomen Karl Schwarzschild, die erste exakte Lösung der komplizierten Differentialgleichungen für den Fall eines Vakuums außerhalb einer gegebenen Masse zu finden. Die von Schwarzschild gefundene und heute nach ihm benannte Lösung beschreibt in letzter Konsequenz ein Schwarzes Loch, was man aber erst in den 1960er Jahren als mögliche physikalische Realität verstand. Der die Feldgleichungen lösende metrische Tensor hat eine einfache Diagonalgestalt

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g_{rr} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{\vartheta\vartheta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{\varphi\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{tt} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

und wird in der Regel mit den Koordinaten $(r, \vartheta, \varphi, ct)$ beschrieben, in denen t die Zeit und (r, ϑ, φ) die räumlichen Kugelkoordinaten sind. Die drei räumlichen Komponenten von g_{ij} haben dabei ein von g_{tt} verschiedenes Vorzeichen, und der Betrag der g_{rr} -Komponente ist der Kehrwert des Betrags von g_{tt} ,

$$g_{rr} = -\frac{1}{g_{tt}}. \quad (3.4)$$

In den 1960er Jahren entdeckte Kerr eine exakte Lösung, die die Schwarzschildlösung verallgemeinerte und nichtverschwindende Komponenten in der Nebendiagonale enthält. Die Kerr'sche Lösung stellt eine rotierende Gravitationsquelle im Vakuum dar [11].

3.2 Nichtverschwindende Energie-Impuls-Tensoren

3.2.1 Modelle des Weltalls

Der Energie-Impuls-Tensor

$$T_{ij} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \rho \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

mit zwei positiven differenzierbaren Funktionen $p = p(t)$ und $\rho = \rho(t)$ stellt physikalisch eine ideale Flüssigkeit mit Druck p und Energiedichte ρ dar. Mit den „chronometrischen Koordinaten“ $(\chi, \theta, \varphi, \tau)$, wobei (χ, θ, φ) für $k \leq 0$ ähnlich wie in der Schwarzschildlösung räumliche Polarkoordinaten und für $k = 1$ vierdimensionale sphärische Koordinaten [25, §111] sind, und den differenzierbaren Funktionen $a = a(\tau)$ und

$$f_k(\chi) = \begin{cases} \sinh \chi & \text{für } k = -1, \\ \chi & \text{für } k = 0, \\ \sin \chi & \text{für } k = 1. \end{cases} \quad (3.6)$$

können dann die Feldgleichungen mit dem metrischen Tensor

$$g_{ij} = a^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f_k^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -f_k^2 \sin^2 \vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

gelöst werden. Näheres siehe z.B. [8, §3.2]. Mit dem Koordinatenwechsel $(\tau, \chi) \mapsto (t, r)$,

$$\tau \mapsto t = \sigma(\tau), \quad \chi \mapsto r = f_k(\chi), \quad (3.8)$$

d.h. mit

$$\tau = \sigma^{-1}(t), \quad \chi = f_k^{-1}(r) = \begin{cases} \operatorname{arsinh} r & \text{für } k = -1, \\ r & \text{für } k = 0, \\ \arcsin r & \text{für } k = 1, \end{cases} \quad (3.9)$$

und mit dem *Weltradius*

$$R(t) := a(\sigma^{-1}(t)) / c, \quad (3.10)$$

c die Lichtgeschwindigkeit, gilt

$$d\tau = \frac{c dt}{R(t)}, \quad \text{bzw.} \quad c dt = a(\tau) d\tau, \quad d\chi = \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}}. \quad (3.11)$$

Damit lautet die Metrik

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right). \quad (3.12)$$

Dies ist das bekannte *Robertson-Walker-Linienelement*, die Metrik einer Raumzeit, die man aus dem *kosmologischen Prinzip* der raumartigen Isotropie erhält; vgl. [37] oder [20, §5.3]. Der Parameter t ist die *kosmische Zeit*.

Führen wir nach (3.8) nur die Koordinatentransformation $\tau \mapsto t$ durch, so lautet das Linienelement des metrischen Tensors (3.7) mit (3.10) für $k = 1$

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 - R^2(t) (d\chi^2 + \sin^2 \chi d\theta^2 + \sin^2 \chi \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

Der räumliche Anteil $R^2(t) (d\chi^2 + \sin^2 \chi d\theta^2 + \sin^2 \chi \sin^2 \theta d\varphi^2)$ ist also genau das dreidimensionale Linienelement einer in den Euklidischen \mathbb{R}^4 eingebetteten Hyperkugel mit Radius R , womit sich der Name „Weltradius“ für R erklärt; vgl. [37, S. 149f].

Ein physikalisches Modell des Weltalls ergibt sich, wenn man mit (3.12) in die Einsteinschen Feldgleichungen mit dem Energie-Impuls-Tensor einer idealen Flüssigkeit („Galaxiengas“) eingeht. Dies liefert letztendlich eine gewöhnliche nicht-lineare Differentialgleichung für $R(t)$, die *Friedmann-Gleichung* [37, pp. 156]. Ist $R(t)$ Lösung dieser Gleichung, so heißt die zugehörige Robertson-Walker-Raumzeit *Friedmann-Kosmos*.

Für den speziellen Fall einer verschwindenden kosmologischen Konstante („Vakuumenergiedichte“) reduziert sich die Friedmann-Gleichung für ein materiedominiertes Universum („inkohärente“ oder „staubförmige Materie“) auf die einfache Gleichung $(dR/dt)^2 = \mathcal{A}/R - k$, $\mathcal{A} = \text{const}$, die mit der Transformation $t \mapsto \tau$, $R(t) \mapsto a(\tau)$ die Form

$$(\dot{a})^2 = A_0 a - k a^2$$

mit $A_0 = \mathcal{A}/c^2$ annimmt, [40, p. 237]. Durch Trennung der Variablen erhält man leicht die Lösungen

$$a(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2} A_0 (\cosh \tau - 1) & \text{für } k = -1, \\ \frac{1}{4} A_0 \tau^2 & \text{für } k = 0, \\ \frac{1}{2} A_0 (1 - \cos \tau) & \text{für } k = 1 \end{cases} \quad (3.13)$$

Mit (3.8) gilt dann

$$t = \begin{cases} \frac{1}{2c} A_0 (\sinh \tau - 1) & \text{für } k = -1, \\ \frac{1}{12c} A_0 \tau^3 & \text{für } k = 0, \\ \frac{1}{2c} A_0 (1 - \sin \tau) & \text{für } k = 1. \end{cases} \quad (3.14)$$

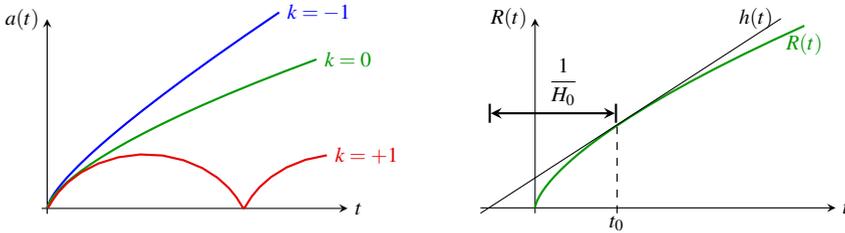


Abbildung 3.1: Ausdehnungen der drei Friedmann-Kosmen. Der Kehrwert der Hubble-Konstanten H_0 stellt eine obere Grenze für das Alter des ertalls dar, wie man aus der Tangentengleichung $h(t) = \dot{R}(t_0)(t - t_0) + R(t_0)$ erkennt.

Da a (bis auf einen positiven Faktor dem Weltradius entsprechend) die Ausdehnung des Weltalls beschreibt, ergeben sich abhängig von dem Parameter k drei verschiedene Entwicklungsszenarien.

Auch für ein strahlungsdominiertes Friedmann-Universum kann man elementare Lösungen erhalten, vgl. [40, §26], [37, §5, speziell S. 156f und S. 160ff], [31, S. 347ff], [25, §§111–113].

Bildet man den Quotienten der Ableitung \dot{R} des Weltradiuses und R , so erhält man die relative Änderungsrate des Weltalls

$$H(t) = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)}, \quad (3.15)$$

die *Hubble-Funktion* H . Für den Zeitpunkt $t_0 = \text{jetzt}$ wird $H_0 := H(t_0)$ *Hubble-Konstante* genannt. Ihr Kehrwert $1/H_0$ gibt bei einem sich nicht beschleunigt ausdehnenden Universum das maximale Alter des Weltalls an [37], denn die Gleichung der Tangente des Graphen von $R(t)$ im Punkt t_0 lautet $h(t) = \dot{R}(t_0)(t - t_0) + R(t_0)$, und deren Nullstelle ist durch

$$t_0 - t = \frac{R(t_0)}{\dot{R}(t_0)} = \frac{1}{H_0} \quad (3.16)$$

gegeben, siehe Abbildung 3.1.

Die Friedmann'schen Modelle des Weltalls und die moderneren Modifikationen wie „inflationäres Universum“ in dessen Anfangsphase haben immer wieder Bestätigung durch physikalische Beobachtungen gefunden. Die erste wichtige Bestätigung war die Entdeckung der Expansion des Weltalls durch den belgischen Priester und Astrophysiker Georges Lemaître 1927 [26] und den US-amerikanischen Astronomen Edwin Hubble 1929 [22]. Weitere bestätigende Beobachtungen waren die Entdeckung der kosmischen Hintergrundstrahlung durch Penzias und Wilson 1965 und die Entdeckung des Higgs-Bosons 2012, vgl. [24, §20.1], [44, §13.3]

Kapitel 4

Die allgemeine Relativität im Alltag

Die meisten und wichtigsten Anwendungen der Allgemeinen Relativitätstheorie sind naturgemäß die Astronomie, insbesondere die Astrophysik und die Kosmologie. Denn immerhin bedarf es beträchtlicher Gravitationsfelder oder Raum- und Zeitskalen, um relativistische Effekte beobachten oder verwenden zu können. Im Alltag erwartet man an sich nicht, dass Einsteins nun einhundert Jahre alten Feldgleichungen Auswirkungen oder überhaupt nur Bedeutung haben könnten. Schließlich hat man nicht gerade häufig ein Schwarzes Loch in seiner Handtasche oder ein kleines inflationäres Universum in seinem Schrank. Und auch der Warp-Antrieb funktioniert noch nicht, mit dem man zum nächsten Wurmloch um die Ecke fahren könnte. Umso erstaunlicher ist es daher, dass es durchaus ganz praktische Anwendungen bzw. Erklärungen der Allgemeinen Relativitätstheorie gibt, die unser alltägliches Leben betreffen.

4.1 Das Olbers'sche Paradoxon

Es war lange ein ungeklärtes Phänomen, dass der Himmel nachts dunkel ist. Das Olbers'sche Paradoxon besagt Folgendes:

Satz 4.1.1 (Olbers'sches Paradoxon (1823) [29]). *Wenn das Weltall räumlich und zeitlich unendlich und gleichförmig mit Sternen wie unsere Sonne erfüllt ist, so ist der Himmel überall mindestens so hell wie die durchschnittliche Leuchtkraft L der Sterne.*

Beweis. [43] Jede Kugelschale mit Radius r und der Dicke dr um die Erde enthält $4\pi\rho r^2 dr$ Sterne, wobei ρ die durchschnittliche Sternendichte bezeichnet. Die

scheinbare Leuchtkraft eines Sterns beträgt auf der Erde L/r^2 . Daher strahlt jede Kugelschale mit der scheinbaren Leuchtkraft $4\pi\rho L dr$. Dieser Integrand ist konstant und insbesondere unabhängig von r . \square

Warum aber ist es dann nachts dunkel? Mindestens eine der drei Prämissen des Satzes muss falsch sein, damit er unserer Beobachtung nicht widerspricht. Entweder ist das Weltall räumlich oder zeitlich endlich, oder es ist nicht gleichförmig mit sonnenähnlichen Sternen erfüllt. Die Einstein'schen Feldgleichungen liefern erstmals in der Wissenschaftsgeschichte physikalisch testbare kosmologische Modelle, die das Olbers'sche Paradoxon lösen, indem sie ein zeitlich endliches Universum ermöglichen.

4.2 GPS

GPS (Global Positioning System, offiziell NAVSTAR GPS) ist ein globales satellitengestütztes Navigationssystem zur Positionsbestimmung. Die Satelliten strahlen hierfür mit codierten Radiosignalen ständig ihre aktuelle Position und die genaue Uhrzeit aus. Aus den Signallaufzeiten können GPS-Empfänger dann ihre eigene Position und die Geschwindigkeit berechnen. Zwar reichen theoretisch dazu die Signale von drei Satelliten mit gleichzeitigem Funkkontakt aus. Da aber die GPS-

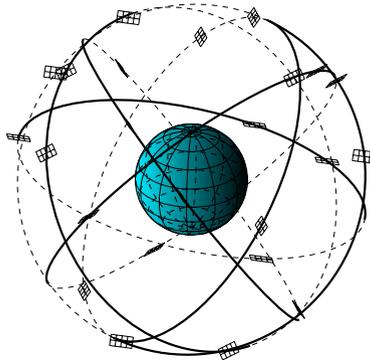


Abbildung 4.1: Satellitengestützte Navigationssysteme wie GPS (Quelle: <http://tug.org/TUGboat/tb33-1/tb103wolcott.pdf>)

Empfänger zur Messung der Laufzeit nicht notwendig eine exakt gehende Uhr verwenden soll, wird das Signal eines vierten Satelliten benötigt, mit dem dann auch die genaue Zeit im Empfänger bestimmt werden kann. GPS wurde im Februar 1978 gestartet und basiert auf 31 Satelliten.

Ein in einer Kreisbahn um ein statisches kugelsymmetrisches Gravitationsfeld der Masse M rotierendes physikalisches System lässt sich allgemein-relativistisch

durch die Schwarzschild-Metrik [8, 9] mit $dr = d\varphi = 0$ beschreiben,

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 - r^2 d\vartheta^2. \quad (4.1)$$

Hierbei bezeichnet τ die Eigenzeit des rotierenden Systems. (t bezeichnet die Koordinatenzeit des gesamten Gravitationsfeldes und entspricht der Eigenzeit eines ruhenden Beobachters im Unendlichen, $r \rightarrow \infty$.) Damit folgt

$$\left(\frac{d\tau}{dt}\right)^2 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) - \frac{r^2}{c^2} \frac{d\vartheta}{dt} = 1 + \frac{2\Phi(r)}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} \quad (4.2)$$

mit dem Gravitationspotenzial $\Phi(r)$ [41, VI.2]. und der Bahngeschwindigkeit $v(r)$, die durch

$$\Phi(r) = -\frac{MG}{r}, \quad v(r) = r \frac{d\vartheta}{dt} \quad (4.3)$$

bestimmt sind. Daraus ergibt sich für die Eigenzeiten τ_E und τ_S eines Empfängers auf der Erde mit Erdradius r_E und einem auf einer Kreisbahn mit Radius r_S um die Erde kreisenden Satelliten [32]

$$\left(\frac{d\tau_S}{d\tau_E}\right)^2 = \frac{1 + 2\Phi(r_S)/c^2 - v_S^2/c^2}{1 + 2\Phi(r_E)/c^2 - v_E^2/c^2} \quad (4.4)$$

Da das Gravitationsfeld der Erde auf der Erdoberfläche recht klein ist, also $\Phi(r_E)/c^2 \ll 1$, und auch die Geschwindigkeiten v_E und v_S viel kleiner als die Lichtgeschwindigkeit sind, lässt sich für Gleichung (4.4) unter Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung als $O(c^{-2})$ die Näherung

$$\frac{d\tau_S}{d\tau_E} = \frac{\sqrt{1 + 2\Phi(r_S)/c^2 - v_S^2/c^2}}{\sqrt{1 + 2\Phi(r_E)/c^2 - v_E^2/c^2}} = 1 + \frac{MG}{c^2} \left(\frac{1}{r_E} - \frac{1}{r_S}\right) + \frac{v_E^2 - v_S^2}{2c^2} + O(c^{-3}) \quad (4.5)$$

anwenden [32, 38]. Mit der Differenz $\Delta\Phi = \Phi(r_E) - \Phi(r_S)$ der beiden Gravitationspotentiale und der Differenz Δv^2 der Geschwindigkeitsquadrate,

$$\Delta\Phi = MG \left(\frac{1}{r_E} - \frac{1}{r_S}\right), \quad \Delta v^2 = v_S^2 - v_E^2 \quad (4.6)$$

gilt also

$$\frac{d\tau_S}{d\tau_E} \approx 1 + \frac{\Delta\Phi}{c^2} - \frac{\Delta v^2}{2c^2}. \quad (4.7)$$

Siehe [39, Gl. (14.12)]. Damit unterliegt die Zeit, die die Atomuhren auf den GPS-Satelliten anzeigen, der speziell-relativistischen *und* der gravitativen Zeitdilatation. Nach der allgemeinen Relativitätstheorie hängt die Ganggeschwindigkeit einer Uhr

vom Ort im Gravitationsfeld ab, also von $\Delta\Phi$, und nach der speziellen von ihrer Geschwindigkeit v_S . Das geringere Gravitationspotential in der Satellitenbahn lässt die Zeit schneller als auf der Erde vergehen, die Bahnbewegung der Satelliten relativ zu einem ruhenden Beobachter auf der Erde verzögert sie. Die beiden Zeitdilatationen wirken also *gegenläufig*. Anders ausgedrückt läuft für einen Beobachter auf der Erdoberfläche läuft also aufgrund der Gravitation die Zeit gegenüber einem Beobachter auf dem Satelliten, der sich relativ zu ihm nicht bewegt, um das Verhältnis $1 + \frac{\Delta\Phi}{c^2}$ langsamer ab.

Für die Werte $M = 5,98 \cdot 10^{24}$ kg, $r_E = 6,38 \cdot 10^6$ m und $r_S = 26,56 \cdot 10^6$ m ergibt Gleichung (4.6) also $\Delta\Phi/c^2 = 5,28 \cdot 10^{-10}$ und $\Delta v^2 = 8,5 \cdot 10^{-11}$ m/s. In der GPS-Satellitenbahn überwiegt also der gravitative Effekt um mehr als das sechsfache: Auf den Satelliten geht damit die Zeit vor. Gleichung (4.7) ergibt mit der relativen Satellitengeschwindigkeit $v_S = 3900$ m/s den relativen Gangunterschied

$$\frac{d\tau_S}{d\tau_E} = 1 + 4,44 \cdot 10^{-10} \quad (4.8)$$

der Eigenzeiten auf der Erde und im Satelliten. Dieses Verhältnis ist deutlich größer als die relative Ganggenauigkeit von Cäsium-Atomuhren, die die Größenordnung 10^{-13} hat. Um diese Zeitdilatation zu kompensieren, wird die Schwingungsfrequenz der Satellitenuhren auf $\mu_S = 10,229999995453$ MHz verstimmt, so dass sie stets synchron mit der Frequenz $\mu_E = 10,23$ MHz der irdischen Empfängeruhren laufen. (Die Probe liefert tatsächlich $\mu_E/\mu_S - 1 = 4,44 \cdot 10^{-10}$.)

Würde die Zeitdilatation nicht kompensiert, so würde sich der Gangunterschied der Uhren pro Jahr auf eine Zeitdifferenz von etwa 0,014 Sekunden aufsummieren. Entsprechend würde die Zeitdilatation zu einer Abweichung

$$\frac{ds}{d\tau_E} - c = c \left(\frac{d\tau_S}{d\tau_E} - 1 \right) = 0,133 \text{ m/s} \quad (4.9)$$

führen. Pro Sekunde würde das Auto also 13 cm von seinem errechneten Kurs abweichen, oder 8 Meter pro Minute bzw. 11,5 km pro Tag. Allerdings würde dieser Fehler auch ohne die korrigierende Verstimmung der Satellitenuhren in dem realen GPS-System nicht auftauchen, da zur Zeit- und Ortsermittlung stets mindestens vier Satelliten kontaktiert werden, so dass tatsächlich immer nur die Satellitenzeit verwendet wird.

In einer Flughöhe von etwa 3 000 km heben sich die speziell-relativistische und die gravitative Zeitdilatation gegenseitig auf.

Kapitel 5

Die logische Basis der allgemeinen Relativitätstheorie

Wie jede physikalische Theorie hat auch die allgemeine Relativitätstheorie als ein logisches Gebäude genau definierte Axiome, die vorausgesetzt werden und aus denen sich alle weiteren Gesetze und Eigenschaften deduktiv ableiten lassen. Das wesentliche Axiom der allgemeinen Relativitätstheorie ist das Äquivalenzprinzip. Einstein formulierte es elegant so, dass es „automatisch“ zwei Gesetzmäßigkeiten implizierte, die er von seiner Gravitationstheorie physikalisch fordern wollte, das Korrespondenzprinzip und die Gleichheit von träger und schwerer Masse.

Das „Korrespondenzprinzip“ bezieht sich hierbei auf das Verhältnis der Gravitationstheorie zur speziellen Relativitätstheorie und besagt, dass lokal, also im Kleinen beziehungsweise in Gebieten schwacher Gravitation, näherungsweise die Gesetze der speziellen Relativitätstheorie gelten. Auf diese Weise enthält die allgemeine Relativitätstheorie also die spezielle als Grenzfall, denn bei verschwindenden Massen und gleichförmigen Bewegungen von Körpern gehen sie ineinander über [4, S. 266]. Die Gleichheit von schwerer und träger Masse auf der anderen Seite besagt, dass das Gewicht eines Körpers in einem gegebenen Gravitationsfeld immer proportional seiner trägen Masse ist: alle Körper fallen im selben Gravitationsfeld gleich schnell [4, S. 37, 269ff], im Erdschwerefeld am Erdboden beispielsweise mit der gleichmäßigen Beschleunigung $g = 9,81 \text{ m/s}^2$. Entsprechend kann man durch eine Beschleunigung in Gegenrichtung sein Gewicht erhöhen, beispielsweise wiegt ein Mensch der Masse 75 kg am Äquator etwa 250 g weniger als an den Polen [27, §1.3.2]. Heute, wo Fernsehbilder und Videoclips mit freischwebenden Astronauten jedem geläufig sind, erstaunt diese Tatsache kaum jemanden.

[Ende Oktober, Anfang November 1907] „wurde mir klar, daß alle Naturgesetze innerhalb des Rahmens der Speziellen Relativitätstheorie behandelt werden können – nur nicht das Gravitationsgesetz. Ich wollte

die Gründe dafür verstehen. [...] Ich saß auf meinem Stuhl im Patentamt in Bern. Plötzlich hatte ich einen Einfall: Wenn sich eine Person im freien Fall befindet, wird sie ihr eigenes Gewicht nicht spüren. Ich war verblüfft. Dieses einfache Gedankenexperiment machte auf mich einen tiefen Eindruck. Es führte mich zu einer Theorie der Gravitation.“

Albert Einstein (1922), zitiert nach [16, S. 343]

„Für einen Beobachter, der sich im freien Fall vom Dach seines Hauses befindet, existiert – zumindest in seiner unmittelbaren Umgebung – kein Gravitationsfeld.“

Albert Einstein (1920), zitiert nach [16, S. 344]

Fölsing betont, dass zu der damaligen Zeit die Gleichheit von träger und schwerer Masse den meisten Physikern gar nicht bewusst war und nur vereinzelt von kritischen Geistern wie Heinrich Hertz oder Ernst Mach analysiert worden war, wovon Einstein wusste. Was Einstein jedoch offenbar nicht wusste, war, dass der ungarische Physiker Loránd Eötvös bereits 1889 die Gleichheit von träger und schwerer Masse experimentell bis auf ein Verhältnis von $1 : 10^8$ bestätigt hatte [16, S. 345].

Einstein schloss aus dem Äquivalenzprinzip radikal, dass die Wirkung eines Gravitationsfeldes ganz prinzipiell nicht von einer beschleunigten Bewegung unterschieden werden kann und dass die Geometrie einer Raumzeit mit einem Gravitationsfeld gekrümmt sein muss. Sein Gedankengang dabei war in etwa folgender. Nach den Gesetzen der speziellen Relativitätstheorie sind die Bahnen gleichförmig bewegter Körper und ebenso die Lichtstrahlen stets die kürzesten Linien zwischen zwei Raumzeitpunkten. Unbeschleunigte Bewegungen im gravitationsfreien Raum beschreiben stets Geraden. In beschleunigten Bezugssystemen, oder äquivalent in Bezugssystemen in einem Gravitationsfeld, müssen dann aber die kürzesten Linien gekrümmt sein. Dieser Gedanke kam Einstein bereits 1907. Die folgenden acht Jahre bemühte er sich „nur“ noch darum, diese Idee mathematisch präzise zu ausformulieren.

In seinem Vortrag „Einiges über die Entstehung der allgemeinen Relativitätstheorie“ führte Einstein aus, wie er auf diese wesentlichen Erkenntnis kam:

„Ich kam der Lösung des Problems zum erstenmal einen Schritt näher, als ich versuchte, das Gravitationsgesetz im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie zu behandeln. Wie die meisten damaligen Autoren versuchte ich, ein Feldgesetz für die Gravitation aufzustellen, da ja die Einführung unvermittelter Fernwirkung wegen der Abschaffung des absoluten Gleichzeitigkeitsbegriffs nicht mehr [...] möglich war. [...]

Solche Überlegungen führten aber zu einem Ergebnis, das [...] nicht zur alten Erfahrung [passte], dass die Körper alle dieselbe Beschleunigung in einem Gravitationsfeld erfahren. Dieser Satz, der auch als

der Satz von der Gleichheit der trägen und schweren Masse formuliert werden kann, leuchtete mir nun in seiner tiefen Bedeutung ein. Ich wunderte mich im höchsten Grade über sein Bestehen und vermutete, dass in ihm der Schlüssel für ein tieferes Verständnis der Trägheit und Gravitation liegen müsse. [...] Nun verwarf ich den Versuch der oben angedeuteten Behandlung des Gravitationsproblems im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie als inadäquat. Er wurde offenbar der fundamentalsten Eigenschaft der Gravitation nicht gerecht.“

zitiert nach [41, S. 81f]

5.1 Das Äquivalenzprinzip

Gemäß Galilei fallen alle Körper unter Vernachlässigung des Luftwiderstands gleich schnell. Die physikalische Grundlage für die allgemeine Relativität ist die experimentell bis auf eine Genauigkeit von 10^{-12} nachgewiesene Identität von träger und schwerer Masse. Auf ihr beruht die Schwerelosigkeit in einer antriebslos fallenden Rakete, denn Beschleunigung und Gravitation kompensieren sich durch diese Identität. Einstein zog daraus die Konsequenz und formulierte das

Axiom 5.1.1 (Äquivalenzprinzip). [41, S. 88] *Keine lokalen Experimente können ein in einem Gravitationsfeld frei fallendes nichtrotierendes System (ein „lokales Inertialsystem“) von einem gleichförmig bewegten System im gravitationsfreien Raum unterscheiden.*

Etwas salopper ausgedrückt besagt das Äquivalenzprinzip also: *Keine lokalen Experimente können zwischen einer Beschleunigung und einem Gravitationsfeld unterscheiden.* Beide Formulierungen des Äquivalenzprinzips sind allerdings etwas vage, da nicht ganz klar ist, was unter „lokalen Experimenten“ zu verstehen ist. Es ist zunächst als heuristisches, also pragmatisch durch Empirie begründetes Prinzip zu verstehen, das später durch die in Abschnitt 5.2.3 formulierte mathematische Forderung präzisiert wird.

5.2 Konsequenzen des Äquivalenzprinzips

5.2.1 Gleichheit von träger und schwerer Masse

Die Trägheit eines Körpers ist dafür verantwortlich, dass er in seinem Bewegungszustand verharrt, solange keine äußere Kraft auf ihn einwirkt. Dementsprechend bezieht sich der Begriff der *trägen Masse* eines Körpers auf den Widerstand, den er seiner Beschleunigung a entgegenstellt. Diese Masse m_{tr} tritt in der klassischen Mechanik im Newton'schen Kraftgesetz

$$F = m_{\text{tr}} a \quad (5.1)$$

auf. Der Begriff der *schweren Masse* bezieht sich auf die gravitative Massenanziehung von Körpern. Sie tritt in dem vom Kraftgesetz unabhängig formulierten Newton'schen Gravitationsgesetz auf. Das empirisch von Newton gefundene Gesetz drückt aus, mit welcher Kraft F sich zwei Körper mit den schweren Massen $m_{s,1}$ und $m_{s,2}$ im Abstand r voneinander durch die Gravitation gegenseitig anziehen:

$$F = \frac{Gm_{s,1}m_{s,2}}{r^2}. \quad (5.2)$$

Die schwere Masse ist also eine spezielle Eigenschaft eines Körpers, ähnlich wie seine elektrische Ladung. Ein geladener Körper erfährt im elektrischen Feld eine von seiner eigenen Ladung abhängige Kraft. Seine Bewegungsreaktion wird dagegen durch seine träge Masse bestimmt. Newtonsch gesehen ist also die Ladung ebenso wie die schwere Masse ein von der trägen Masse ganz unabhängiger Begriff, und es erscheint als Zufall, dass beide Massen gleich sind, wie alle bisher durchgeführten Präzisionsmessungen ergeben haben.

Das Äquivalenzprinzip nun *impliziert* die Gleichheit von träger und schwerer Masse. Gemäß der allgemeinen Relativität gibt es also keinen Unterschied zwischen ihnen. Würde jedoch durch ein Experiment ein Unterschied nachgewiesen, so wäre die allgemeine Relativitätstheorie widerlegt.

Die Gleichheit von schwerer und träger Masse ist aber nur notwendige, nicht hinreichende Bedingung für das Äquivalenzprinzip. Das heißt, die Gleichheit impliziert nicht unbedingt das Äquivalenzprinzip. Dazu folgendes Gegenbeispiel. Betrachten wir eine fiktive Welt, in der die elektrische Ladung eines Körpers, bei geeigneter Wahl der Maßstäbe, gleich seiner trägen Masse ist. Dann bewegen sich geladene Teilchen in einem homogenen Magnetfeld als „Gravitationsfeld“ durch die Larmorkraft in Spiralen. Da die Radien und Achsen der Spiralbewegungen beliebig sind, gibt es jedoch keine Transformation auf ein beschleunigtes Bezugssystem, welche die Wirkung des Magnetfeldes auf alle Teilchen gleichzeitig beseitigt [41, S. 88].

5.2.2 Gravitationsfelder krümmen die Raumzeit

Formal führt das Äquivalenzprinzip auf die allgemeine Relativität im Sinne der grundsätzlichen Gleichberechtigung aller Inertialsysteme, also aller frei fallenden Bezugssysteme. Physikalisch liefert sie eine Deutung der Gravitation. Denn ein Astronaut in einer Rakete kann nach dem Äquivalenzprinzip nicht unterscheiden, ob die Rakete noch am Boden im Schwerfeld der Erde steht oder sich bereits im Vakuum befindet und mit Erdbeschleunigung g nach oben gedrückt wird.

Stellen wir uns dazu zwei Beobachter Alice und Bob in einem gravitationsfreien Raum vor, wobei Bob sich in einem Aufzug befindet, der sich mit einer konstanten Beschleunigung bewegt (Abbildung 5.1). Für die sich in Ruhe befindliche Alice beschreibt ein Lichtstrahl durch den beschleunigten Aufzug eine Gerade für den



Abbildung 5.1: Alice und Bob in einem mit g beschleunigten Aufzug im gravitationsfreien Raum. Links die Sicht von Alice, rechts die von Bob, der ein Schwerfeld g und eine mit g beschleunigte Alice wahrnimmt.

beschleunigten Bob dagegen eine gekrümmte Bahn. Da Bob nach dem Äquivalenzprinzip nicht unterscheiden kann, ob er mit g beschleunigt wird oder sich ruhend in einem Gravitationsfeld g befindet, *müssen* wir daraus ableiten, dass ein Gravitationsfeld Lichtstrahlen ablenkt. Unter der Annahme, dass Lichtstrahlen sich auf der kürzestmöglichen Bahn zwischen zwei Punkten in der Raumzeit bewegen, einer *Geodäten*, zog Einstein daraus die radikale Konsequenz, dass die Krümmung der Bahn eines Bezugssystems nur von der *Geometrie des Raums und der Zeit* abhängt: Raum und Zeit bilden eine vierdimensionale geometrische Einheit, die so genannte *Raumzeit*. Sie ist gekrümmt, jedoch sieht sie in jedem Punkt lokal wie die flache Minkowskiraumzeit (die Welt der gravitationsfreien speziellen Relativität) aus, ähnlich wie die Erdoberfläche in jedem ihrer Punkte lokal wie eine Ebene aussieht.

Ziehen wir eine Analogie, um den Begriff der Geodäte zu erläutern: Ein Flugzeug fliegt möglichst die kürzeste Verbindung, also auf einer Geodäte; das ist ein Großkreis, der beispielsweise von Frankfurt nach San Francisco über Island und Grönland führt, wie man sich an einem Globus leicht klarmacht. Diese Route ist jedoch auf einer üblichen Karte eine gekrümmte Linie. Ähnlich dem Flugzeug beschreiben Inertialsysteme Geodäten in einer gekrümmten Raumzeit. Jedes Bezugssystem entspricht einer Karte der Raumzeit, also einer Projektion auf die Minkowskiraumzeit eines Beobachters.

Jede Masse krümmt also die Raumzeit um sie herum. Ein Körper erfährt die Abweichung seiner tatsächlichen Bahn von seiner Geodäten als Kraft: Ganz im Sinne des Äquivalenzprinzips sind wir schwer, da die Erdoberfläche uns von unserer Geodäten wegbeschleunigt [4, S. 273].

5.2.3 Mathematische Formulierung des Äquivalenzprinzips

„Die Darstellung der physikalischen Gesetze ohne Bezug zur Geometrie entspricht der Darstellung unserer Gedanken ohne Worte. Wir benötigen Worte, wenn wir unsere Gedanken ausdrücken wollen. Wonach sollen wir aber suchen, um unser Problem darzustellen? Diese Frage war für mich bis 1912 ungelöst, als ich auf die Idee stieß, daß die Gaußsche Flächentheorie der Schlüssel zu diesem Geheimnis sein könnte. Ich erkannte, daß die Gaußschen Flächenkoordinaten eine große Be-

deutung für das Verständnis dieses Problems haben. Ich erinnerte mich an meine Studentenzeit und die Vorlesung über Geometrie von Carl Friedrich Geiser, der die Gaußsche Theorie diskutiert hatte. Ich fand, daß die Grundlagen der Geometrie für dieses Problem eine tiefe physikalische Bedeutung haben.“

Albert Einstein (1922), zitiert nach [16, S. 354]

Im Jahre 1828 hatte Carl Friedrich Gauß (1777-1855) in Göttingen eine Theorie zweidimensionaler gekrümmter Flächen entwickelt, deren Grundgedanke es war, einen Ableitungsbegriff für Kurven und Funktionen zu liefern, der unabhängig von den verwendeten Koordinaten von der Flächenkrümmung abstrahiert und nur den Änderungsanteil der Funktion berücksichtigt. Auf diese Weise war es möglich, Bewegungsgesetze als „kovariante“ Differentialgleichungen auf gekrümmten Flächen mathematisch präzise zu definieren. Eine zentrale Rolle nahm dabei der metrische Tensor ein, eine symmetrische (2×2) -Matrix, deren Einträge reellwertige Funktionen auf der Fläche darstellten. Der Mathematiker Bernhard Riemann (1826–1866) verallgemeinerte 1854 diesen Ansatz zu einer Theorie von Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension, wobei eine Mannigfaltigkeit die höherdimensionale Entsprechung einer Fläche ist. Der metrische Tensor erweiterte sich für eine n -dimensionale Mannigfaltigkeit bei Riemann zu einer quadratischen $(n \times n)$ -Matrix, deren Einträge nun reellwertige Funktionen auf der Mannigfaltigkeit waren. Mit diesem Tensor ließen sich alle wichtigen geometrischen Eigenschaften der Mannigfaltigkeit ausdrücken, wobei allerdings komplizierte nichtlineare Differentialgleichungen verwendet werden mussten. Zur konkreten Berechnung und formalen Vereinfachung entwickelten 1901 die italienischen Mathematiker Gregorio Ricci-Curbastro (1853–1925) und Tullio Levi-Civita (1873–1941) einen handlichen Kalkül, der auch heute noch für Probleme der allgemeinen Relativitätstheorie verwendet wird [4, S. 276].

Einstein konnte mit diesem mächtigen mathematischen Apparat der Differentialgeometrie eine Raumzeit bei Vorhandensein von Gravitationsfeldern als eine gekrümmte vierdimensionale Mannigfaltigkeit betrachten und darauf Bewegungsgesetze kovariant formulieren. Er war aber zunächst mit der notwendigen Mathematik nicht vertraut und bat im Spätsommer 1912, als er von Prag zurück nach Zürich zog, seinen alten Freund Marcel Grossmann, ihm dabei zu helfen [16, S. 356].

Das mathematische Modell eines Gravitationsfeldes gemäß der allgemeinen Relativität ist eine *Raumzeit*, d.h. eine vierdimensionale pseudo-Riemann'sche Mannigfaltigkeit (\mathcal{M}, g) , deren metrischer Tensor g die gleiche Signatur wie die Minkowski-Metrik $\eta_{ij} = \text{diag}(-1, -1, -1, 1)$ hat. Die Metrik g legt die Kausalitätsverhältnisse der Raumzeit fest, lokal gibt es stets einen Zukunfts- und einen Vergangenheitslichtkegel. Das Äquivalenzprinzip besagt dann, dass alle physikalischen Gesetze durch die folgenden beiden Forderungen bestimmt sind [41, §2.I.3].

1. Die Gleichungen der Gesetze dürfen neben der Metrik und ihren Ableitungen nur Größen enthalten, die schon in der speziell-relativistischen Formulierung

vorkommen.

2. Sie müssen allgemein kovariant sein und sich in einem Koordinatensystem, in dem für $x_0 \in \mathcal{M}$ stets $g_{ij}(x_0) = \eta_{ij}$ und $g_{ij,k}(x_0) = 0$ gilt¹, einem „geodätischen System“, auf die speziell-relativistische Form reduzieren.

Die kovariante Form eines physikalischen Gesetzes ist durch diese beiden Forderungen zwar weitgehend bestimmt. Allerdings existieren grundsätzlich Mehrdeutigkeiten bei Gleichungen mit Ableitungen höherer Ordnung, da partielle Ableitungen miteinander vertauschen, kovariante Ableitungen jedoch nicht [41, §2.1.4.4].

5.2.4 Die gravitative Rotverschiebung

Betrachten wir zwei Experimentatoren in einem Raumschiff, welches eine gleichförmige Beschleunigung g aufrecht erhält. Der Abstand zwischen den beiden Beobachtern in Richtung g sei h (Abbildung 5.2a). Zur Zeit $t = 0$ schicke der untere

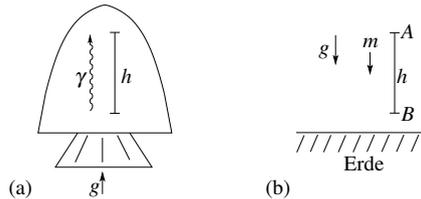


Abbildung 5.2: (a) Rotverschiebung durch Beschleunigung, (b) Rotverschiebung durch Gravitation.

Beobachter ein Photon γ in Richtung des oberen Beobachters ab. Nehmen wir an, dass das Raumschiff zur Zeit $t = 0$ bezüglich eines Initialsystems ruht. Sei $v = gt$ die Geschwindigkeit der beiden Beobachter nach der Zeit t . Unter der Voraussetzung $v \ll c$ können wir im Folgenden näherungsweise Terme der Ordnung v/c vernachlässigen. Dann erreicht das Photon den oberen Beobachter in der Zeit $t \approx h/c$. Nun hat dieser in der aber die Geschwindigkeit $v = gt \approx gh/c$ erreicht. Er beobachtet also das Photon durch den Dopplereffekt mit der Rotverschiebung

$$z := \frac{\Delta\lambda}{\lambda} \approx \frac{v}{c} \approx \frac{gh}{c^2}. \tag{5.3}$$

Nach dem Äquivalenzprinzip ist dieselbe Rotverschiebung auch für zwei Beobachter in einem homogenen Gravitationsfeld zu erwarten. Da für ein schwaches homogenes Gravitationsfeld (wie z.B. auf der Erdoberfläche) $\Delta\Phi = gh$ für das Newtonsche Gravitationspotential Φ gilt, können wir in Newtonscher Näherung für die Rotverschiebung auch

$$z = \frac{\Delta\Phi}{c^2} \tag{5.4}$$

¹Das Komma bezeichnet die partielle Ableitung, also $g_{ij,k} = \partial g_{ij} / \partial x_k$.

schreiben. Diese Formel konnte durch terrestrische Experimente mit Hilfe des Mößbauer-Effektes auf 1% bestätigt.

Die Rotverschiebung (5.3) folgt aber auch mit Hilfe einer Energiebetrachtung. Nehmen wir dazu zwei Punkte A und B in einem homogenen Gravitationsfeld g im Abstand h an (Abbildung 5.2b). Eine Masse m falle mit der Anfangsgeschwindigkeit 0 von A nach B . Im Punkt B hat sie nach der Newtonschen Theorie eine kinetische Energie $E_{\text{kin}} = mgh$. Nun stellen wir uns vor, dass die gesamte Energie des fallenden Körpers, also Ruheenergie plus kinetische Energie, im Punkt B in ein Photon annihiliert wird, das sich im Gravitationsfeld zum Punkt A zurück bewegt. Hätte das Photon keine Wechselwirkung mit dem Gravitationsfeld, so könnten wir es dort wieder in eine Masse m verwandeln und würden bei diesem Kreisprozess die Energie $\Delta E = mgh$ gewinnen. Um den Energiesatz zu retten, muss deshalb das Photon nach Rot verschoben werden. Für die Photonenergie muss gelten

$$E_{\text{unten}} = E_{\text{oben}} + mgh = mc^2 + mgh = mc^2 \left(1 + \frac{gh}{c^2} \right) = E_{\text{oben}} \left(1 + \frac{gh}{c^2} \right).$$

Das bedeutet für die Änderung der Wellenlänge

$$1 + z = \frac{\lambda_{\text{oben}}}{\lambda_{\text{unten}}} = \frac{\hbar\omega_{\text{unten}}}{\hbar\omega_{\text{oben}}} = \frac{E_{\text{unten}}}{E_{\text{oben}}} = 1 + \frac{gh}{c^2}, \quad (5.5)$$

übereinstimmend mit (5.3).

Kapitel 6

Epilog

Einsteins Entwicklung der allgemeinen Relativitätstheorie ist eine der größten geistigen Leistungen eines einzelnen Menschen. Sie ist umso bemerkenswerter, als vom Experiment her keine Notwendigkeit bestand, über die bis dahin anerkannte Newton'sche Gravitationstheorie hinauszugehen, einmal abgesehen von der winzigen Periheldrehung des Merkurs. Maßgebend für die Entwicklung waren allein theoretische Erwägungen. Denn die Newton'sche Gravitationstheorie als ein Fernwirkungsgesetz, nach dem die Schwerkraft sofort überall („instantan“) wirkt, ist nicht vereinbar mit der speziellen Relativitätstheorie, in der keine physikalische Wirkung schneller als mit Lichtgeschwindigkeit fortschreiten kann. Mit dem Axiom der Gleichheit von träger und schwerer Masse und der Bedingung, dass die Gravitationstheorie die Minkowski'sche Raumzeit der speziellen Relativitätstheorie als Grenzfall für verschwindende Schwerefelder enthält, schloss Einstein daraus, dass Gravitation zwangsläufig zu einer Krümmung der Raumzeit führt.

Diese in der menschlichen Geistesgeschichte herausragende Leistung wirkte durch ihre Eleganz und ihre Ästhetik auf Zeitgenossen und die nachfolgenden Generationen.

„Die damals vollendete allgemeine Relativitätstheorie, anders als die spezielle ohne gleichzeitige Beiträge anderer Forscher von Einstein allein aufgebaut, wird für immer das Musterbeispiel einer Theorie von vollendeter Schönheit der mathematischen Struktur bleiben.“

Wolfgang Pauli, zitiert nach [41, S. 81]

Die allgemeine Relativitätstheorie ist in den nunmehr 100 Jahren, die sie existiert, in keiner ihrer Vorhersagen widerlegt worden. Mit ihr lassen sich sonst unerklärliche Beobachtungen herleiten, so die Lichtablenkung im Schwerefeld, die Periheldrehung des Merkur, gravitative Rotverschiebung und Zeitdilatation, Modelle

des Weltalls, Neutronensterne, Pulsare und Schwarze Löcher. Sie liefert uns gleichsam ein ganzes System von Sensoren, mit dem wir die Welt um uns mit nie gekannter Tiefe erkennen und erklären können.

Und dennoch ist die allgemeine Relativitätstheorie falsch. Zumindest ist sie falsch, wenn wir von ihr erwarten, dass sie uns die Welt in ihrer Gesamtheit so darstellt, wie sie wirklich ist.¹ Sie hat, wie jede physikalische Theorie, ihren Gültigkeitsbereich, der durch ihre Axiome, aber auch durch Experimente und Beobachtungen abgesteckt wird. Sie ist bis heute die genaueste Theorie der makroskopischen Welt, also der Welt im Großen. Wir können sie sogar konsequent weiterdenken und „realistisch“ über bislang unbekannte Phänomene wie Gravitationswellen, Wurmlöcher, Warp-Antriebe oder Zeitreisen spekulieren. Allerdings führen viele ihrer Lösungen zwangsläufig zu sogenannten Singularitäten, also Raumzeitpunkten, wo die Theorie ihre eigene Gültigkeit verliert [21]. Beispielsweise sind das die Zentren Schwarzer Löcher oder der Urknall in den heute gängigen Modellen des Weltalls. Und schlimmer noch: Die allgemeine Relativitätstheorie ist blind für die mikroskopische Welt, sie kann die Elementarteilchen mit ihren Wechselwirkungen und die Quanteneffekte nicht erklären.

Wenn die Theorie nun aber falsch ist, so muss ihr einziges Axiom falsch sein, das Äquivalenzprinzip. Also entweder sind träge und schwere Masse doch nicht gleich, oder wir leben nicht in einer glatten (also kontinuierlichen und differenzierbaren) vierdimensionalen Raumzeit. So ist es am Ende eine zwar tragische, aber ihrer Eleganz angemessen würdevolle Eigenschaft der allgemeinen Relativitätstheorie, dass sie die Ursache ihres Scheiterns so klar herausstellt. Sie wird jedoch, auch wenn sie falsch ist, einen ewigen Platz in der Geistesgeschichte der Menschheit behalten.

„[Die allgemeine Relativitätstheorie] erschien und erscheint mir auch heute noch als die größte Leistung menschlichen Denkens über die Natur, die erstaunlichste Vereinigung von philosophischer Tiefe, physikalischer Intuition und mathematischer Kunst. Ich bewundere sie wie ein Kunstwerk.“

Max Born, zitiert nach [41, S. 81]

¹ In einem Gespräch am 23. Oktober 2015 gemeinsam mit Dieter Bangert zur Vorbereitung unserer Festvorlesung „100 Jahre allgemeine Relativitätstheorie“ in Hagen am 25. November 2015 gab Dirk Berben als seine persönliche Lieblingsfrage zu physikalischen Theorien ironisch an: „Aber wie ist es denn nun *wirklich*?“

Appendix

Anhang A

Mathematische Erläuterungen

A.1 Differentialgeometrische Grundlagen

A.1.1 Mannigfaltigkeiten und Karten

Gegeben sei eine n -dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit mit Koordinaten $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$; die Koordinaten bilden hierbei eine Karte vgl. [12, §5]. Als eine einfache zweidimensionale Mannigfaltigkeit betrachten wir die Oberfläche $S^2(r)$ der Kugel mit Radius r um den Ursprung des \mathbb{R}^3 . Eine mögliche Karte dieser Fläche ist durch die Kugelkoordinaten

$$(x_1, x_2) = (\theta, \varphi) \tag{A.1}$$

mit $(\theta, \varphi) \in (0, \pi) \times [0, 2\pi)$ gegeben. Hierbei gibt ϑ den Breitengrad eines Punktes

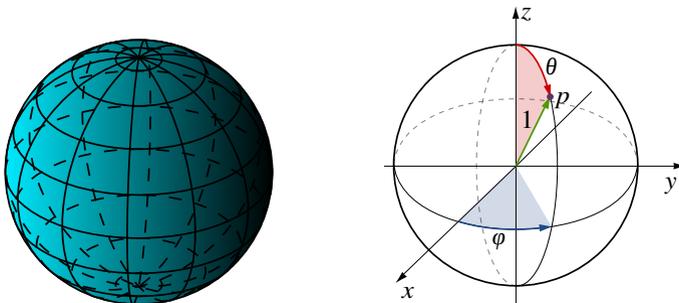


Abbildung A.1: Kugelkoordinaten (ϑ, φ) auf der Oberfläche der Einheitskugel. θ beschreibt hierbei den Breitengrad eines Ortes auf der Kugeloberfläche, φ seinen Längengrad.

p auf der Kugeloberfläche wieder, und φ den Längengrad, siehe Abbildung A.1.

Beachte hierbei jedoch die in der Mathematik übliche Konvention, dass der Nordpol den Breitengrad $\theta = 0$ hat, der Südpol den Breitengrad $\theta = \pi$ und der Äquator den Breitengrad $\theta = \frac{\pi}{2}$, im Unterschied zu der konventionellen Kartierung der Erdkugel, wo die Pole die Breitengrad 90° N bzw. S haben und der Äquator bei 0° liegt.

Eine Karte ist also stets eine Abbildung einer Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ der Mannigfaltigkeit \mathcal{M} ,

$$(x_1, \dots, x_n) : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (\text{A.2})$$

Beispielsweise sind die Kugelkoordinaten eine Abbildung $(\theta, \varphi) \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$$(\theta, \varphi)(p) = (\theta(p), \varphi(p)) \quad (\text{A.3})$$

für einen Punkt $p \in \mathcal{M} \setminus \{N, S\}$, wobei N und S den Nord- und den Südpol bezeichnen. Diese Karte ist in der Kartographie etwas unüblich und wird für die Erde als „Plattkarte“ bezeichnet.¹ Beachte, dass wir für dieses Koordinatensystem die beiden

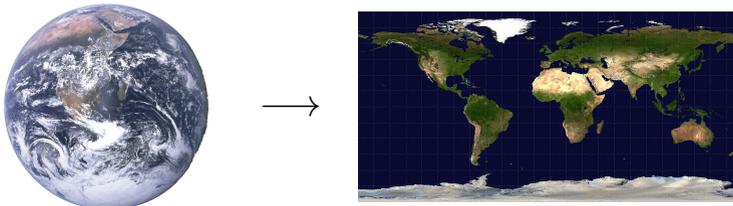


Abbildung A.2: Kugelkoordinaten (θ, φ) stellen für die Erde die Plattkarte dar. Bildquellen: NASA und Wikimedia.

Pole ausschließen müssen, da für sie kein eindeutiger Längengrad φ existiert. Die Pole sind sogenannte Koordinatensingularitäten. Die Karte, die unsere Koordinaten darstellt, ist also nur lokal, sie gilt nicht global auf der ganzen Mannigfaltigkeit. Das ist übrigens kein Sonderfall, sondern die Regel:

Bemerkung A.1.1. Viele Mannigfaltigkeiten gestatten grundsätzlich keine globale Karte, also Koordinaten, die eineindeutig jeden Punkt in den \mathbb{R}^n abbilden. \square

Natürlich gibt es nicht nur eine Möglichkeit, eine Karte für eine gegebene Mannigfaltigkeit zu finden. Durch die Bedingung an eine Karte, dass sie für ihren Definitionsbereich jeden Punkt auf der Mannigfaltigkeit eineindeutig („bijektiv“) auf die Karte abbildet, kann man einen Kartenwechsel $x \mapsto x'$ als Funktion $x'(x)$ darstellen, in Koordinatenkomponenten also

$$x'_i = x'_i(x_1, \dots, x_n) \quad (i = 1, \dots, n). \quad (\text{A.4})$$

¹ <https://de.wikipedia.org/wiki/Plattkarte>

Wegen der Differenzierbarkeit der Mannigfaltigkeit müssen diese Funktionen differenzierbar sein, d.h. wir können die partiellen Ableitungen $\partial x'_i / \partial x_j$ für $i, j = 1, \dots, n$ bilden, die die Jacobi-Matrix

$$\left(\frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \right)_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial x'_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x'_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial x'_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

ergeben. Details siehe [17] und [12, §5.4].

A.1.2 Tensorfelder

Ein *Tensorfeld*, hier oft einfach kurz (und etwas ungenau) als *Tensor* bezeichnet, ist ein geometrisches Objekt auf einer n -dimensionalen differenzierbaren Mannigfaltigkeit mit Koordinaten $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Ein *kontravariantes Tensorfeld erster Stufe* (X^1, \dots, X^n) ist ein Vektorfeld (also eine vektorwertige Funktion auf der Mannigfaltigkeit bzw. einer Karte der Mannigfaltigkeit), $X^i = X^i(\mathbf{x})$, der bei einem Koordinatenwechsel (A.4) Komponenten erhält, die der Bedingung

$$X'^i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} X^j =: \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} X^j \quad (\text{A.6})$$

für jeden Punkt der Mannigfaltigkeit genügen. Die verkürzte Schreibweise des letzten Termes ist dabei nach der *Einstein'schen Summenkonvention* zu lesen, nach der stets über zwei gleichnamige Indizes, von denen der eine oben und der andere unten steht, summiert wird. Ein Beispiel für ein kontravariantes Tensorfeld erster Stufe

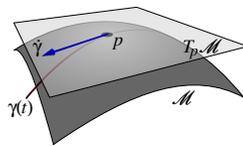


Abbildung A.3: Der Tangentialraum am Punkt $p \in \mathcal{M}$. Bildquelle: Wikimedia.

sind die Differentiale dx^i der Koordinaten, wobei hier die Indizes *oben* geschrieben werden. Sie bilden die Basis des Vektorraums der kontravarianten Tensoren erster Stufe, den *Tangentialraum* $T_p \mathcal{M}$ am Punkt p der Mannigfaltigkeit. Er wird also von den Differentialen dx^i aufgespannt und stellt z.B. für eine Kurve γ deren Ableitung

$$\dot{\gamma} = \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} dx^i \quad (\text{A.7})$$

als Vektor in $T_p\mathcal{M}$ dar, wie in Abbildung A.3 illustriert.

Ein *kovariantes Tensorfeld erster Stufe* (X_1, \dots, X_n) ist entsprechend ein Vektorfeld, $X^i = X^i(\mathbf{x})$, das bei einem Koordinatenwechsel (A.4) Komponenten erhält, die der Bedingung

$$X'^i = \frac{\partial x_j}{\partial x'_i} X_j \quad (\text{A.8})$$

für jeden Punkt der Mannigfaltigkeit genügen. Die Komponenten eines kovarianten Tensors gehen also mit den Einträgen der Jacobi-Matrix der inversen Koordinatentransformation $\mathbf{x}' \mapsto \mathbf{x}$ ineinander über. Die partiellen Ableitungen als Operatoren,

$$\partial_i := \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad (\text{A.9})$$

sind kovariante Tensoren erster Stufe, sie bilden eine Basis des dualen Vektorraums der kovarianten Tensoren erster Stufe, den *Kotangentialraum* $T_p^*\mathcal{M}$ am Punkt $p \in \mathcal{M}$. Tatsächlich sind die kontravarianten und die kovarianten Tensorkomponenten X^i und X_i nur die Koordinatenfunktionen eines geometrischen Objekts X , das die Mathematiker daher als Bezeichnung wählen. Man kann auf diese Weise einen Tensor X auf einen anderen Tensor Y anwenden, in Symbolen $X(Y)$, was in Komponentenschreibweise

$$X(Y) = X_i Y^i \in \mathbb{R} \quad (\text{A.10})$$

lautet, also eine Multiplikation der Tensorkomponenten, die einen reellen Wert ergibt.

Dieses Tensorkonzept lässt sich auf Tensoren beliebiger Stufe erweitern. So verhalten sich die Komponenten eines kontravarianten Tensors zweiter Stufe X^{ij} und ein kovarianter Tensor zweiter Stufe X_{ij} bei einem Koordinatenwechsel (A.4) gemäß

$$X'^{ij} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \frac{\partial x'_k}{\partial x_l} X^{kl}, \quad X'_{ij} = \frac{\partial x_k}{\partial x'_i} \frac{\partial x_l}{\partial x'_j} X_{kl} \quad (\text{A.11})$$

Mit Tensoren kann man wie mit Vektoren rechnen, man kann sie skalar multiplizieren und man kann Tensoren gleicher Stufe addieren.

A.1.3 Der metrische Tensor und die Krümmungstensoren

Ein *metrische Tensor* g einer n -dimensionalen Mannigfaltigkeit ist ein Tensor zweiter Stufe, der auf Tensoren erster Stufe X und Y angewandt symmetrisch ist,

$$g(X, Y) = g(Y, X) \quad (\text{A.12})$$

und der nichtentartet ist, d.h. der nur für den Nulltensor als ein fixer Parameter für alle Tensoren verschwindet:

$$g(X, Y) = 0 \quad \text{für alle } Y, \text{ nur wenn } X = 0. \quad (\text{A.13})$$

Die kovarianten und kontravarianten Komponenten g_{ij} und g^{ij} sind also symmetrische reguläre Matrizen. Sie sind als Matrizen einander invers,

$$g_{ij}g^{ik} = \delta^j_k = \begin{cases} 1 & \text{wenn } i = k, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

Die *Signatur* des metrischen Tensors ist die Differenz der Anzahl der positiven Eigenwerte minus der Anzahl der negativen Eigenwerte von g_{ij} , was wegen (A.14) dieselbe Zahl ergibt, wenn man g^{ij} statt g_{ij} verwendet. Da zudem die Signatur auf der gesamten Mannigfaltigkeit konstant bleibt, ist es eine Invariante des metrischen Tensors. Einstein benutzte für die flache Minkowski-Raumzeit den metrischen Tensor $g_{ij} = \text{diag}(-1, -1, -1, 1)$, der die Signatur -2 hat.

Ist der metrische Tensor einer Mannigfaltigkeit gegeben, so lassen sich daraus die für die kovariante Ableitung wesentlichen *Christoffelsymbole* Γ^i_{jk} über die Formeln

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}g^{kl} \left(\frac{\partial g_{li}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right) \quad (\text{A.15})$$

eindeutig bestimmen [5, S. 28]. Das sind insgesamt n^3 Größen, allerdings wegen der Symmetrie in den Indizes i, j , also $\Gamma^k_{ji} = \Gamma^k_{ij}$, sind nur

$$n^3 - \binom{n}{2} \quad (\text{A.16})$$

unabhängige Symbole zu berechnen. Für eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit sind das also $64 - 6 = 58$ Größen.

Damit wiederum lässt sich der für die Geometrie der Mannigfaltigkeit zentrale *Riemann'sche Krümmungstensor* \mathbf{R} , oft kurz *Riemann-Tensor* genannt, berechnen [5, S. 25]:

$$R^j_{lmn} = \frac{\partial \Gamma^j_{lm}}{\partial x_n} - \frac{\partial \Gamma^j_{ln}}{\partial x_m} + \Gamma^j_{kn}\Gamma^k_{lm} - \Gamma^j_{kn}\Gamma^k_{lm} \quad (\text{A.17})$$

Damit sehen wir mit einem Blick (na gut, mit zwei Blicken), dass der Riemann-Tensor allein durch den metrischen Tensor und dessen partiellen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung bestimmt ist, allerdings auf eine sehr komplexe Art und Weise.

Wie können wir uns den Riemann-Tensor anschaulich vorstellen? Bildet man mit Hilfe der kovarianten Komponenten des metrischen Tensors die folgende Summe über seine Komponenten, so erhalten wir den kovarianten Tensor vierter Stufe

$$R_{ilnm} = g_{ij}R^j_{lnm}. \quad (\text{A.18})$$

Können wir uns die Komponenten von Tensoren bis zur zweiten Stufe noch recht gut visualisieren, nämlich als Zahl, Vektor, oder Matrix,

$$(x), \quad (x_1, \dots, x_n), \quad \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.19})$$

so ist ein Tensor dritter Stufe zwar schwieriger darzustellen, aber wir brauchen ja nur n quadratische ($n \times n$)-Matrizen in die dritte Dimension „hintereinander zu stapeln“, so bildet er eine Art dreidimensionales Würfelgitter. Ein Tensor vierter Stufe macht uns da für unsere Anschauung natürlich ernste Probleme, denn die vierte Dimension hat die Evolution unserer Vorstellungskraft nicht mitgegeben, wahrscheinlich wegen Unbrauchbarkeit im Alltagsleben. Die Informatikerinnen und Informatiker haben es da etwas einfacher, für sie ist das als ein Array $R[i][j][k][l]$ mit vier Indizes darstellbar. Aber „vorstellen“ ... ?

Ist nun einmal der Riemann-Tensor mühsam berechnet, so kann man daraus recht schnell durch die folgenden Summierungen den *Ricci-Tensor* R_{ij} und den *Ricci-Skalar* R erhalten:

$$R_{ij} = g^{kl} R_{ikjl} \quad \text{und} \quad R = g^{ij} R_{ij}. \quad (\text{A.20})$$

Die detaillierteste Information über die Krümmung einer Mannigfaltigkeit gibt der Riemann-Tensor, bei einer flachen Mannigfaltigkeit verschwinden seine sämtlichen n^4 Komponenten. Es kann aber Fälle geben, in denen zwar der Riemann-Tensor nicht verschwindet, aber der Ricci-Tensor null ist. Entsprechend kann der Krümmungsskalar R verschwindet, der Ricci-Tensor jedoch nichtverschwindende Komponenten hat.

Für die allgemeine Relativitätstheorie kann man auch eine Abkürzung nehmen und mit den Christoffelsymbolen den Ricci-Tensor direkt berechnen, ohne den Riemann-Tensor zu kennen [5, S. 31]:

$$R_{ij} = \frac{\partial \Gamma^k_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial^2 \ln \sqrt{|g|}}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial \ln \sqrt{|g|}}{\partial x_k} \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{il} \Gamma^l_{kj}. \quad (\text{A.21})$$

Hierbei bezeichnet $|g|$ die Determinante der Matrix g_{ij} der kovarianten Komponenten des metrischen Tensors.

Beispiel A.1.2. (*Kugeloberflächen*) Sei die Mannigfaltigkeit $\mathcal{M} = S^2(r)$ der Kugel mit Radius r um den Ursprung in der Karte (θ, φ) der Kugelkoordinaten aus Gleichung (A.1) mit dem metrischen Tensor

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} r^2 & 0 \\ 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (\text{A.22})$$

gegeben.² Zunächst lautet damit die einzige nichtverschwindende partielle Ableitung der Komponenten

$$\frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \theta} = 2r^2 \sin \theta \cos \theta. \quad (\text{A.23})$$

² Zur Notation: Wir identifizieren hier und oft auch im Folgenden die *Indizes* i, j, \dots mit den *Variablen* x_i, x_j, \dots

und die Determinante des metrischen Tensors

$$g = r^4 \sin^2 \theta, \quad (\text{A.24})$$

d.h.

$$\ln \sqrt{|g|} = \ln(r^2 \sin \theta) \quad (\text{A.25})$$

Da die Matrix g_{ij} Diagonalgestalt hat, vereinfacht sich die Formel (A.15) für die Christoffel-Symbole beträchtlich und sie lassen sich *ohne* die Summenkonvention als

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kk} \left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right) \quad (\text{A.26})$$

schreiben. Ferner ist nur die Ableitung nach θ ungleich Null, d.h. die nichtverschwindenden Christoffelsymbole sind $\Gamma^\theta_{\varphi\varphi}$ und $\Gamma^\varphi_{\theta\varphi}\Gamma^\varphi_{\varphi\theta}$. Da $g^{ii} = 1/g_{ii}$ wegen der Diagonalgestalt von g_{ij} , folgern wir

$$\Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \left(\frac{\partial g_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial g_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \theta} \right) = -\frac{1}{2} g^{\theta\theta} \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \theta} = -\sin \theta \cos \theta \quad (\text{A.27})$$

$$\Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \frac{1}{2} g^{\varphi\varphi} \left(\frac{\partial g_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} + \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \theta} - \frac{\partial g_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} \right) = \frac{1}{2} g^{\varphi\varphi} \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \theta} = \cot \theta, \quad (\text{A.28})$$

siehe [30, S. 85], Mit (A.25) folgt

$$\frac{\partial \ln \sqrt{|g|}}{\partial \theta} = \cot \theta, \quad \frac{\partial \ln \sqrt{|g|}}{\partial \varphi} = 0, \quad (\text{A.29})$$

und die einzige nichtverschwindende zweite partielle Ableitungen lautet

$$\frac{\partial^2 \ln \sqrt{|g|}}{\partial \theta^2} = -\frac{1}{\sin^2 \theta} \quad (\text{A.30})$$

Auf diese Weise lassen sich die einzelnen Summanden des Ricci-Tensors in Gleichung (A.21) gemäß der folgenden Tabelle berechnen:

$i \ j$	$\frac{\partial \Gamma^\theta_{ij}}{\partial \theta}$	$\frac{\partial^2 \ln \sqrt{ g }}{\partial x_i \partial x_j}$	$\cot \theta \ \Gamma^\theta_{ij}$	$\Gamma^k_{il} \Gamma^l_{kj}$
$\theta \ \theta$	0	$-\frac{1}{\sin^2 \theta}$	0	$(\Gamma^\varphi_{\theta\varphi})^2$
$\theta \ \varphi$	0	0	0	0
$\varphi \ \varphi$	$\sin^2 \theta - \cos^2 \theta$	0	$-\cos^2 \theta$	$\Gamma^\theta_{\varphi\varphi} \Gamma^\varphi_{\theta\varphi}$

(A.31)

Für die nichtverschwindenden Terme der letzten Spalte dieser Tabelle gilt

$$(\Gamma^\varphi_{\theta\varphi})^2 = \cot^2 \theta, \quad \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = -\cos^2 \theta,$$

d.h. mit (A.21) lauten die Komponenten des Ricci-Tensors

$$R_{ij} = \begin{pmatrix} R_{\theta\theta} & R_{\theta\varphi} \\ R_{\varphi\theta} & R_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (\text{A.32})$$

Der Krümmungsskalar $R = g^{ij}R_{ij}$ nach Gleichung (3.10) ergibt sich daraus nach

$$R = g^{\theta\theta}R_{\theta\theta} + g^{\varphi\varphi}R_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \sin^2 \theta = \frac{2}{r^2}. \quad (\text{A.33})$$

Die Krümmung wird also umso kleiner, je größer der Radius r der Kugel ist. (Für eine etwas andere Herleitung siehe <http://www.physicspages.com/2014/10/21/ricci-tensor-and-curvature-scalar-for-a-sphere/>.) Der Riemann-Tensor der Kugelfläche hat die Gestalt

$$R^k{}_{ilj} = \frac{1}{r^2} (\delta_l^k g_{ij} - \delta_j^k g_{il}), \quad (\text{A.34})$$

d.h. die einzigen nichtverschwindenden Komponenten des Krümmungstensors sind

$$R^\theta{}_{\varphi\varphi\theta} = -R^\theta{}_{\varphi\theta\varphi} = \sin^2 \theta, \quad R^\varphi{}_{\theta\theta\varphi} = -R^\varphi{}_{\theta\varphi\theta} = -1. \quad (\text{A.35})$$

Vgl. [40, S. 21f]. □

Beispiel A.1.3. (Der Euklid'sche Raum \mathbb{R}^3 in Kugelkoordinaten) Sei die Mannigfaltigkeit $\mathcal{M} = \mathbb{R}^3$ in der Karte (r, θ, φ) mit dem metrischen Tensor

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (\text{A.36})$$

gegeben. Zunächst lauten damit die nichtverschwindenden partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} = 2r, \quad \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r} = 2r \sin^2 \theta, \quad \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \theta} = 2r^2 \sin \theta \cos \theta, \quad (\text{A.37})$$

und die Determinante des metrischen Tensors

$$g = r^4 \sin^2 \theta, \quad (\text{A.38})$$

d.h.

$$\ln \sqrt{|g|} = \ln(r^2 \sin \theta) \quad (\text{A.39})$$

Da die Matrix g_{ij} Diagonalgestalt hat, vereinfacht sich die Formel (A.15) für die Christoffel-Symbole beträchtlich und sie lassen sich *ohne* die Summenkonvention als

$$\Gamma^k{}_{ij} = \frac{1}{2} g^{kk} \left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right) \quad (\text{A.40})$$

schreiben. Ferner sind nur die Ableitungen nach r und θ ungleich Null, d.h. die nichtverschwindenden Christoffelsymbole sind

$$\Gamma^r_{ii}, \Gamma^\theta_{r\theta}, \Gamma^\varphi_{\varphi\varphi}, \Gamma^\varphi_{r\varphi}, \Gamma^\varphi_{\theta\varphi}, \quad (\text{A.41})$$

mit $i = \theta, \varphi$. Das sind also nur noch 6 Symbole, die wir zu berechnen haben. Da $g^{ii} = 1/g_{ii}$ wegen der Diagonalgestalt von g_{ij} , folgern wir

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = \frac{1}{2}g^{rr} \left(\frac{\partial g_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial g_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} \right) = -\frac{1}{2}g^{rr} \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} = -r, \quad (\text{A.42})$$

$$\Gamma^r_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2}g^{rr} \left(\frac{\partial g_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial g_{r\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r} \right) = -\frac{1}{2}g^{rr} \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r} = -r \sin^2 \theta \quad (\text{A.43})$$

$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta} \left(\frac{\partial g_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} - \frac{\partial g_{\theta r}}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{2}g^{\theta\theta} \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} = \frac{1}{r}, \quad (\text{A.44})$$

$$\Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta} \left(\frac{\partial g_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial g_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \theta} \right) = -\frac{1}{2}g^{\theta\theta} \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \theta} = -\sin \theta \cos \theta \quad (\text{A.45})$$

$$\Gamma^\varphi_{r\varphi} = \frac{1}{2}g^{\varphi\varphi} \left(\frac{\partial g_{\varphi r}}{\partial \varphi} + \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r} - \frac{\partial g_{r\varphi}}{\partial \varphi} \right) = \frac{1}{2}g^{\varphi\varphi} \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r} = \frac{1}{r}, \quad (\text{A.46})$$

$$\Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \frac{1}{2}g^{\varphi\varphi} \left(\frac{\partial g_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} + \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \theta} - \frac{\partial g_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} \right) = \frac{1}{2}g^{\varphi\varphi} \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \theta} = \cot \theta. \quad (\text{A.47})$$

Mit (A.39) folgt

$$\frac{\partial \ln \sqrt{|g|}}{\partial r} = \frac{2}{r}, \quad \frac{\partial \ln \sqrt{|g|}}{\partial \theta} = \cot \theta, \quad \frac{\partial \ln \sqrt{|g|}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \ln \sqrt{|g|}}{\partial t} = 0, \quad (\text{A.48})$$

und die einzigen nichtverschwindenden zweiten partiellen Ableitungen lauten

$$\frac{\partial^2 \ln \sqrt{|g|}}{\partial r^2} = -\frac{2}{r^2}, \quad \frac{\partial^2 \ln \sqrt{|g|}}{\partial \theta^2} = -\frac{1}{\sin^2 \theta} \quad (\text{A.49})$$

Auf diese Weise lassen sich die einzelnen Summanden des Ricci-Tensors in Gleichung (A.21) gemäß der folgenden Tabelle berechnen:

$i \ j$	$\frac{\partial \Gamma^r_{ij}}{\partial r} + \frac{\partial \Gamma^\theta_{ij}}{\partial \theta}$	$\frac{\partial^2 \ln \sqrt{ g }}{\partial x_i \partial x_j}$	$\frac{2}{r} \Gamma^r_{ij} + \cot \theta \Gamma^\theta_{ij}$	$\Gamma^k_{il} \Gamma^l_{kj}$
$r \ r$	0	$-\frac{2}{r^2}$	0	$\sum_i (\Gamma^i_{ri})^2$
$r \ \theta$	0	0	$\frac{1}{r} \cot \theta$	$\Gamma^\varphi_{r\varphi} \Gamma^\varphi_{\varphi\theta}$
$r \ \varphi$	0	0	0	0
$\theta \ \theta$	-1	$-\frac{1}{\sin^2 \theta}$	-2	$2\Gamma^\theta_{\theta r} \Gamma^r_{\theta\theta} + (\Gamma^\varphi_{\theta\varphi})^2$
$\theta \ \varphi$	0	0	0	0
$\varphi \ \varphi$	$-\cos^2 \theta$	0	$-2\sin^2 \theta - \cos^2 \theta$	$2\Gamma^r_{\varphi\varphi} \Gamma^\varphi_{r\varphi} + \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} \Gamma^\varphi_{\theta\varphi}$

Für die nichtverschwindenden Terme der letzten Spalte dieser Tabelle gilt

$$\begin{aligned} \sum_i (\Gamma^i_{ri})^2 &= \frac{2}{r^2}, & 2\Gamma^\theta_{\theta r} \Gamma^r_{\theta\theta} + (\Gamma^\varphi_{\theta\varphi})^2 &= -2 + \cot^2 \theta, \\ \Gamma^\varphi_{r\varphi} \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} &= \frac{1}{r} \cot \theta, & 2\Gamma^r_{\varphi\varphi} \Gamma^\varphi_{r\varphi} + \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} &= -2 \sin^2 \theta - \cos^2 \theta, \end{aligned}$$

d.h. auch die entsprechenden Elemente des Ricci-Tensors verschwinden,

$$R_{rr} = R_{r\theta} = R_{\theta\theta} = R_{\varphi\varphi} = 0.$$

Das heißt aber, dass der gesamte Ricci-Tensor der Nulltensor ist. Der Euklid'sche Raum besitzt also keine Ricci-Krümmung. \square

Beispiel A.1.4. (Die Schwarzschild-Raumzeit) Vgl. [Sch], [PP]. Sei die Mannigfaltigkeit $\mathcal{M} = \mathbb{R}^4 \setminus \{\mathbf{0}\}$ in der Karte (r, θ, φ, t) mit dem metrischen Tensor

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} -\frac{r}{r-2M} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 - \frac{2M}{r} \end{pmatrix} \quad (\text{A.51})$$

gegeben, vgl. Gleichung (3.3). Hierbei sei M die „geometrisierte Masse“ der Raumzeit, die mit der physikalischen Masse \mathfrak{M} über $M = G\mathfrak{M}/c^2$ zusammenhängt [37, S. 270]. Zunächst lauten damit die nichtverschwindenden partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{rr}}{\partial r} &= -\frac{2M}{(r-2M)^2}, & \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} &= -2r, & \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r} &= -2r \sin^2 \theta, & \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} &= \frac{2M}{r^2}, \\ \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \theta} &= -2r^2 \sin \theta \cos \theta, \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

und die Determinante des metrischen Tensors

$$g = -r^4 \sin^2 \theta, \quad (\text{A.53})$$

d.h.

$$\ln \sqrt{|g|} = \ln(r^2 \sin \theta) \quad (\text{A.54})$$

Da die Matrix g_{ij} Diagonalgestalt hat, vereinfacht sich die Formel (A.15) für die Christoffel-Symbole beträchtlich und sie lassen sich *ohne* die Summenkonvention als

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{kk} \left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right) \quad (\text{A.55})$$

schreiben. Ferner sind nur die Ableitungen nach r und θ ungleich Null, d.h. die nichtverschwindenden Christoffelsymbole sind

$$\Gamma^r_{ii}, \Gamma^\theta_{r\theta}, \Gamma^\theta_{\varphi\varphi}, \Gamma^\varphi_{r\varphi}, \Gamma^\varphi_{\theta\varphi}, \Gamma^t_{tr}, \quad (\text{A.56})$$

mit $i = r, \theta, \varphi, t$. Das sind also nur noch 9 Symbole, die wir zu berechnen haben. Da

$g^{ii} = 1/g_{ii}$ wegen der Diagonalgestalt von g_{ij} , folgern wir

$$\Gamma^r_{rr} = \frac{1}{2}g^{rr} \left(\frac{\partial g_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial g_{rr}}{\partial r} - \frac{\partial g_{rr}}{\partial r} \right) = \frac{1}{2}g^{rr} \frac{\partial g_{rr}}{\partial r} = \frac{M}{r(2M-r)}, \quad (\text{A.57})$$

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = \frac{1}{2}g^{rr} \left(\frac{\partial g_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial g_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} \right) = -\frac{1}{2}g^{rr} \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} = 2M-r, \quad (\text{A.58})$$

$$\Gamma^r_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2}g^{rr} \left(\frac{\partial g_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial g_{r\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r} \right) = -\frac{1}{2}g^{rr} \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r} = (2M-r) \sin^2 \theta \quad (\text{A.59})$$

$$\Gamma^r_{tt} = \frac{1}{2}g^{rr} \left(\frac{\partial g_{rt}}{\partial t} + \frac{\partial g_{rt}}{\partial t} - \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} \right) = -\frac{1}{2}g^{rr} \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} = \frac{M(r-2M)}{r^3}, \quad (\text{A.60})$$

$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta} \left(\frac{\partial g_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} - \frac{\partial g_{\theta r}}{\partial \theta} \right) = \frac{1}{2}g^{\theta\theta} \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r} = \frac{1}{r}, \quad (\text{A.61})$$

$$\Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = \frac{1}{2}g^{\theta\theta} \left(\frac{\partial g_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial g_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \theta} \right) = -\frac{1}{2}g^{\theta\theta} \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \theta} = -\sin \theta \cos \theta \quad (\text{A.62})$$

$$\Gamma^\varphi_{r\varphi} = \frac{1}{2}g^{\varphi\varphi} \left(\frac{\partial g_{\varphi r}}{\partial \varphi} + \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r} - \frac{\partial g_{r\varphi}}{\partial \varphi} \right) = \frac{1}{2}g^{\varphi\varphi} \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r} = \frac{1}{r}, \quad (\text{A.63})$$

$$\Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \frac{1}{2}g^{\varphi\varphi} \left(\frac{\partial g_{\varphi\theta}}{\partial \varphi} + \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \theta} - \frac{\partial g_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} \right) = \frac{1}{2}g^{\varphi\varphi} \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \theta} = \cot \theta. \quad (\text{A.64})$$

$$\Gamma^t_{tr} = \frac{1}{2}g^{tt} \left(\frac{\partial g_{tr}}{\partial r} + \frac{\partial g_{tr}}{\partial t} - \frac{\partial g_{tr}}{\partial t} \right) = \frac{1}{2}g^{tt} \frac{\partial g_{tt}}{\partial r} = \frac{M}{r(r-2M)}, \quad (\text{A.65})$$

Mit (A.54) folgt

$$\frac{\partial \ln \sqrt{|g|}}{\partial r} = \frac{2}{r}, \quad \frac{\partial \ln \sqrt{|g|}}{\partial \theta} = \cot \theta, \quad \frac{\partial \ln \sqrt{|g|}}{\partial \varphi} = \frac{\partial \ln \sqrt{|g|}}{\partial t} = 0, \quad (\text{A.66})$$

und die einzigen nichtverschwindenden zweiten partiellen Ableitungen lauten

$$\frac{\partial^2 \ln \sqrt{|g|}}{\partial r^2} = -\frac{2}{r^2}, \quad \frac{\partial^2 \ln \sqrt{|g|}}{\partial \theta^2} = -\frac{1}{\sin^2 \theta} \quad (\text{A.67})$$

Auf diese Weise lassen sich die einzelnen Summanden des Ricci-Tensors in Gleichung (A.21) gemäß der folgenden Tabelle berechnen:

$i \ j$	$\frac{\partial \Gamma^r_{ij}}{\partial r} + \frac{\partial \Gamma^\theta_{ij}}{\partial \theta}$	$\frac{\partial^2 \ln \sqrt{ g }}{\partial x_i \partial x_j}$	$\frac{2}{r} \Gamma^r_{ij} - \cot \theta \Gamma^\theta_{ij}$	$\Gamma^k_{il} \Gamma^l_{kj}$
$r \ r$	$\frac{2M(r-M)}{r^2(r-2M)^2}$	$-\frac{2}{r^2}$	$\frac{2M}{r^2(2M-r)}$	$\sum_i (\Gamma^i_{ri})^2$
$r \ \theta$	0	0	$\frac{1}{r} \cot \theta$	$\Gamma^\varphi_{r\varphi} \Gamma^\varphi_{\varphi\theta}$
$r \ \varphi$	0	0	0	0
$r \ t$	0	0	0	0
$\theta \ \theta$	-1	$-\frac{1}{\sin^2 \theta}$	$\frac{4M-2r}{r}$	$2\Gamma^\theta_{\theta r} \Gamma^r_{\theta\theta} + (\Gamma^\varphi_{\theta\varphi})^2$
$\theta \ \varphi$	0	0	0	0
$\theta \ t$	0	0	0	0
$\varphi \ \varphi$	$-\cos^2 \theta$	0	$\frac{4M-2r}{r} \sin^2 \theta - \cos^2 \theta$	$2\Gamma^r_{\varphi\varphi} \Gamma^\varphi_{r\varphi} + \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} \Gamma^\varphi_{\theta\varphi}$
$\varphi \ t$	0	0	0	0
$t \ t$	$-\frac{2M(r-M)}{r^4}$	0	$\frac{2M(r-2M)}{r^4}$	$2\Gamma^t_{tr} \Gamma^r_{tt}$

Für die nichtverschwindenden Terme der letzten Spalte dieser Tabelle gilt

$$\begin{aligned}\sum_i (\Gamma^i_{ri})^2 &= \frac{2M^2}{r^2(r-2M)^2} + \frac{2}{r^2}, & \Gamma^\varphi_{r\varphi}\Gamma^\varphi_{\varphi\theta} &= \frac{1}{r} \cot \theta, \\ 2\Gamma^\theta_{\theta r}\Gamma^r_{\theta\theta} + (\Gamma^\varphi_{\theta\varphi})^2 &= \frac{4M-2r}{r} + \cot^2 \theta, & 2\Gamma^t_{tr}\Gamma^r_{tt} &= -\frac{2M^2}{r^4}, \\ 2\Gamma^r_{\varphi\varphi}\Gamma^\varphi_{r\varphi} + \Gamma^\theta_{\varphi\varphi}\Gamma^\varphi_{\theta\varphi} &= \frac{4M-2r}{r} \sin^2 \theta - \cos^2 \theta,\end{aligned}$$

d.h. die entsprechenden Elemente des Ricci-Tensors verschwinden,

$$R_{rr} = R_{r\theta} = R_{\theta\theta} = R_{\varphi\varphi} = R_{tt} = 0.$$

Das heißt aber, dass der gesamte Ricci-Tensor der Nulltensor ist [30, §8.4], [40, §10.1]. Aus (A.17) ergibt sich für den Riemann-Tensor

$$R^r_{\theta\theta r} = \frac{M}{r}, \quad R^r_{\varphi\varphi r} = \frac{M \sin^2 \theta}{r}, \quad R^r_{ttr} = \frac{2M(r-2M)}{r^4}, \quad (\text{A.69})$$

$$R^\theta_{r\theta r} = \frac{M}{r^2(2M-r)}, \quad R^\theta_{\varphi\varphi\theta} = -\frac{2M \sin^2 \theta}{r}, \quad R^\theta_{t\theta t} = \frac{M(2M-r)}{r^4}, \quad (\text{A.70})$$

$$R^\varphi_{r\varphi r} = \frac{M}{r^2(2M-r)}, \quad R^\varphi_{\theta\varphi\theta} = \frac{2M}{r}, \quad R^\varphi_{t\varphi t} = \frac{M(2M-r)}{r^4}, \quad (\text{A.71})$$

$$R^t_{trt} = \frac{2M}{r^2(r-2M)}, \quad R^t_{\theta t\theta} = -\frac{M}{r}, \quad R^t_{\varphi t\varphi} = -\frac{M \sin^2 \theta}{r}. \quad (\text{A.72})$$

Seine restlichen nichtverschwindenden Komponenten ergeben sich aus der Antisymmetrie $R^i_{jkl} = -R^i_{jlk}$. Mit $R_{ijkl} = g_{im}R^m_{jkl}$ erhalten wir

$$R_{r\theta\theta r} = -\frac{M}{r-2M}, \quad R_{r\varphi\varphi r} = -\frac{M \sin^2 \theta}{r-2M}, \quad R_{rttr} = -\frac{2M}{r^3}, \quad (\text{A.73})$$

$$R_{\theta r\theta r} = -\frac{M}{2M-r}, \quad R_{\theta\varphi\varphi\theta} = 2Mr \sin^2 \theta, \quad R_{\theta t\theta t} = \frac{M(2M-r)}{r^2}, \quad (\text{A.74})$$

$$R_{\varphi r\varphi r} = -\frac{M \sin^2 \theta}{2M-r}, \quad R_{\varphi\theta\theta\varphi} = -2Mr \sin^2 \theta, \quad R_{\varphi t\varphi t} = \frac{M(2M-r) \sin^2 \theta}{r^2}, \quad (\text{A.75})$$

$$R_{trtr} = \frac{2M}{r}, \quad R_{t\theta t\theta} = -\frac{M(r-2M)}{r^2}, \quad R_{t\varphi t\varphi} = -\frac{M(r-2M) \sin^2 \theta}{r^2}, \quad (\text{A.76})$$

Da der dem Riemann'schen Krümmungstensor zugeordnete Kretschmann'sche Krümmungsskalar $R_{ijkl}R^{ijkl}$

$$R_{ijkl}R^{ijkl} = \frac{48M^2}{r^6} \quad (\text{A.77})$$

und zudem die Determinante der Metrik

$$g = -r^4 \sin^2 \theta \quad (\text{A.78})$$

lautet, kann man vermuten, dass die Raumzeit nur bei $r = 0$ eine Singularität besitzt [3, S. 225], [13, S. 32]. Man bestätigt diese Vermutung, indem man die Kruskal-Szekeres-Koordinaten aus Beispiel A.1.10 verwendet. \square

Beispiel A.1.5. (*Die Friedmann-Kosmen*) [3, §25] Seien für $k \in \{-1, 0, +1\}$ die Mannigfaltigkeiten

$$\mathcal{M}_k = \left\{ \begin{array}{ll} \mathbb{R}^4 & \text{für } k = -1, 0, \\ \mathbb{R} \times S^3 & \text{für } k = +1, \end{array} \right\} \quad (\text{A.79})$$

in der Karte (r, θ, φ, t) mit dem metrischen Tensor nach Gleichung (3.12), also

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} -\frac{R^2(t)}{1-k^2r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -R^2(t)r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -R^2(t)r^2 \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.80})$$

Da die Komponenten dieser Metrik von t , r und θ abhängen, haben wir 13 nichtverschwindende unabhängige Christoffelsymbole zu berechnen, wegen der Diagonalgestalt des metrischen Tensors wieder gemäß Gleichung (A.55):

$$\begin{aligned} \Gamma^r_{tr} &= \frac{1}{2} g^{rr} \frac{\partial g_{rr}}{\partial t}, & \Gamma^r_{rr} &= \frac{1}{2} g^{rr} \frac{\partial g_{rr}}{\partial r}, & \Gamma^r_{\theta\theta} &= -\frac{1}{2} g^{rr} \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial t}, \\ \Gamma^r_{\varphi\varphi} &= -\frac{1}{2} g^{rr} \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}, \end{aligned} \quad (\text{A.81})$$

$$\Gamma^\theta_{t\theta} = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial t}, \quad \Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial r}, \quad \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\frac{1}{2} g^{\theta\theta} \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \theta}, \quad (\text{A.82})$$

$$\Gamma^\varphi_{t\varphi} = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial t}, \quad \Gamma^\varphi_{r\varphi} = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial r}, \quad \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi}, \quad (\text{A.83})$$

$$\Gamma^t_{rr} = -\frac{1}{2} g^{tt} \frac{\partial g_{rr}}{\partial t}, \quad \Gamma^t_{\theta\theta} = -\frac{1}{2} g^{tt} \frac{\partial g_{\theta\theta}}{\partial t}, \quad \Gamma^t_{\varphi\varphi} = -\frac{1}{2} g^{tt} \frac{\partial g_{\varphi\varphi}}{\partial t}, \quad (\text{A.84})$$

also explizit

$$\begin{aligned} \Gamma^r{}_{tr} &= \frac{\dot{R}}{R}, & \Gamma^r{}_{rr} &= \frac{kr}{1-kr^2}, & \Gamma^r{}_{\theta\theta} &= (kr^2 - 1)r, \\ \Gamma^r{}_{\varphi\varphi} &= (kr^2 - 1)r \sin^2 \theta, \end{aligned} \quad (\text{A.85})$$

$$\Gamma^\theta{}_{t\theta} = \frac{\dot{R}}{R}, \quad \Gamma^\theta{}_{r\theta} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^\theta{}_{\varphi\varphi} = -\sin \theta \cos \theta, \quad (\text{A.86})$$

$$\Gamma^\varphi{}_{t\varphi} = \frac{\dot{R}}{R}, \quad \Gamma^\varphi{}_{r\varphi} = \frac{1}{r}, \quad \Gamma^\varphi{}_{\theta\varphi} = \cot \theta, \quad (\text{A.87})$$

$$\Gamma^r{}_{rr} = \frac{R\dot{R}}{c^2(1-kr^2)}, \quad \Gamma^t{}_{\theta\theta} = \frac{R\dot{R}r^2}{c^2}, \quad \Gamma^t{}_{\varphi\varphi} = \frac{R\dot{R}r^2 \sin^2 \theta}{c^2}. \quad (\text{A.88})$$

Der durch den metrischen Tensor (A.80) beschriebene dreidimensionale Raum (r, θ, φ) ist ein Raum konstanter Krümmung mit dem Krümmungsradius $R(t)$. Die Komponenten des dreidimensionalen Riemantensors haben in solchen Räumen eine einfache Gestalt und hängen nicht von den Ableitungen des metrischen Tensors ab [40, Gleichungen (19,27) und (21,26)], so dass für die räumlichen Komponenten des Riemantensors der Friedmann-Kosmen gilt:

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{kc^2 + \dot{R}^2}{R^2} (g_{\alpha\mu}g_{\beta\nu} - g_{\beta\mu}g_{\alpha\nu}) \quad (\text{A.89})$$

$(\alpha, \beta, \mu, \nu = 1, 2, 3)$, siehe [40, Gleichung (26,2)]. Insgesamt erhalten wir also 6 unabhängige nichtverschwindende Komponenten des Riemantensors [CoS]:

$$R_{r\theta r\theta} = -\frac{R^2 r^2 (\dot{R}^2 + kc^2)}{c^2 (kr^2 - 1)}, \quad R_{r\varphi r\varphi} = -\frac{R^2 r^2 (\dot{R}^2 + kc^2) \sin^2 \theta}{c^2 (kr^2 - 1)}, \quad (\text{A.90})$$

$$R_{\theta\varphi\theta\varphi} = -\frac{R^2 r^4 (\dot{R}^2 + kc^2) \sin^2 \theta}{c^2}, \quad R_{trtr} = \frac{R\ddot{R}}{kr^2 - 1}, \quad (\text{A.91})$$

$$R_{t\theta t\theta} = -R\ddot{R}r^2, \quad R_{t\varphi t\varphi} = -R\ddot{R}r^2 \sin^2 \theta. \quad (\text{A.92})$$

Daraus ergibt sich der Kretschmann'sche Krümmungsskalar $R_{ijkl}R^{ijkl}$ als

$$K = 12 \frac{\ddot{R}^2 R^2 + \dot{R}^4 + 2\dot{R}^2 kc^2 + k^2 c^4}{c^4 R^4}. \quad (\text{A.93})$$

Er hat genau eine Polstelle, nämlich wenn der Weltradius R null ist. Diese Polstelle bildet die einzige Singularität der Friedmann-Kosmen, den *Urknall* oder *Big Bang* (bzw. im Falle eines endlichen Universums $k = +1$ ebenso das *Weltende* oder den *Big Crunch*). \square

A.1.4 Raumzeiten als vierdimensionale Mannigfaltigkeiten

Dieser Abschnitt behandelt die geometrischen Grundlagen der Raumzeitgeometrie, wie sie Albert Einstein am 25. November 1915 präsentierte, damals natürlich noch

nicht mit den topologischen Feinheiten. Wesentliche Teile dieses Abschnitts stammen aus [8].

Sei \mathcal{M} eine vierdimensionale, parakompakte, offene C^k -Mannigfaltigkeit, $k \in \{2, 3, \dots\}$ [33, p. 212] oder [1, p. 309]. \mathcal{M} sei ferner zusammenhängend und parallelisierbar, d.h. es existiert ein globaler Schnitt des prinzipalen Vierbein-Bündels (*principal four-frame bundle*)

$$(E(\mathcal{M}), p, \mathcal{M}; GL(4, \mathbb{R}^4)).$$

Bemerkung A.1.6. Die topologischen Einschränkungen an die Mannigfaltigkeit \mathcal{M} , die das Modell eines allgemeinen Gravitationsfeldes, d.h. eine *Raumzeit*, darstellen soll, sind physikalisch plausibel:

- (i) (*zusammenhängend*) Zwischen Punkten (»Ereignissen«) zweier verschiedener Zusammenhangskomponenten bestehen keinerlei Wechselwirkungen, sie stellen gewissermaßen zwei voneinander unabhängige »Universen« dar.
- (ii) (*parakompakt*) Die Parakompaktheit einer Mannigfaltigkeit ist hinreichend, um auf ihr eine Partition der Eins konstruieren und damit Analysis treiben zu können [6, p. 16].
- (iii) (*offen*) Kompakte Raumzeiten besitzen geschlossene zeitartige Kurven, d.h. Zeitmaschinen sind konstruierbar; dies widerspricht jedoch den Konzepten der Kausalität und des freien Willens [20].
- (iv) (*parallelisierbar*) Nach Geroch [18] besitzt eine raum- und zeitorientierbare offene Raumzeit genau dann eine Spin-Struktur, wenn sie parallelisierbar ist.

□

Folgerung A.1.7. Die Parallelisierbarkeit von \mathcal{M} impliziert bereits ihre Orientierbarkeit [42].

Definition A.1.8. Sei $x \in \mathcal{M}$. Ein Vektor $\mathbf{V} \in T_x \mathcal{M}$ heißt *raum-, zeit- bzw. lichtartig*, wenn

$$\mathbf{g}_x(\mathbf{V}, \mathbf{V}) = g_{ij}V^iV^j < 0, > 0 \text{ bzw. } = 0$$

gilt. Der Nullvektor $\mathbf{V} = 0$ sei per Definition raumartig. Ein nicht-raumartiger Vektor heißt auch *kausal*. Sei $T\mathcal{M}$ das Tangentialbündel von \mathcal{M} . Dann heißt $(x, \mathbf{V}) \in T\mathcal{M}$ *raum-, zeit- oder lichtartig*, wenn $\mathbf{V}(x) \in T_x \mathcal{M}$ es ist. Sei

$$\mathcal{T} = \{(x, \mathbf{V}) \in T\mathcal{M} : (x, \mathbf{V}) \text{ ist kausal}\}$$

die Menge der kausalen Punkte von $T\mathcal{M}$. \mathcal{T} hat entweder eine oder zwei Zusammenhangskomponenten [35, §1.2, Prop.1.2.1]. Existiert ein zeitartiges (insbesondere nirgends verschwindendes) Vektorfeld $T: \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}$, $T(x) = (x, \mathbf{e}_{(0)} := \mathbf{T})$, so heißt $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ eine *durch T zeitorientierte Raumzeit* [2, pp. 16]. □

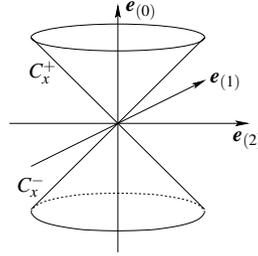


Abbildung A.4: Der Lichtkegel $C_x \subset T_x \mathcal{M}$.

Für einen beliebigen zeitartigen Vektor $\mathbf{T} \in T_x \mathcal{M}$ gilt $\mathbf{g}_x(\mathbf{T}, \mathbf{V}) = 0$ genau dann, wenn \mathbf{V} raumartig ist, wie man schnell mit der Minkowski-Basis sieht. Daher ist die C^k -Abbildung

$$\psi : \mathcal{T} \rightarrow (-\infty, 0) \cup (0, \infty), \quad \psi(x, \mathbf{V}) = \mathbf{g}_x(\mathbf{T}, \mathbf{V})$$

wohldefiniert. Ferner ist sie surjektiv. Also hat \mathcal{T} zwei Zusammenhangskomponenten. Wir nennen

$$\mathcal{T}^+ = \psi^{-1}(0, \infty), \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{T}^- = \psi^{-1}(-\infty, 0)$$

die *Zukunft* bzw. die *Vergangenheit* bezüglich \mathbf{T} . Für jedes $x \in \mathcal{M}$ bildet die Untermannigfaltigkeit

$$C_x = \{\mathbf{V} \in T_x \mathcal{M} \mid \mathbf{g}_x(\mathbf{V}, \mathbf{V}) = 0, \mathbf{V} \neq 0\} \tag{A.94}$$

einen Kegel, wie man mit der Darstellung von \mathbf{V} in der Basis $\{\mathbf{e}_{(a)} : a = 0, \dots, 3\}$, $\mathbf{V} = V^{(a)} \mathbf{e}_{(a)}$ und durch die Beziehung

$$\mathbf{g}_x(\mathbf{V}, \mathbf{V}) = g_{ij} V^i V^j = \eta_{(a)(b)} V^{(a)} V^{(b)} = (V^{(0)})^2 - \sum_{\alpha=1}^3 (V^{(\alpha)})^2$$

sofort sieht. Dieser Kegel ist der *Lichtkegel*. C_x besteht aus den zwei Zusammenhangskomponenten

$$C_x^+ = \{\mathbf{V} = V^{(a)} \mathbf{e}_{(a)} \in C_x \mid V^{(0)} > 0\}, \quad C_x^- = C_x \setminus C_x^+,$$

dem *Zukunfts-* und dem *Vergangenheitslichtkegel* bezüglich \mathbf{T} , vgl. Abbildung A.4. Zusammengefaßt haben wir das Resultat:

Satz A.1.9. *Unter den obigen auf S. 48 aufgeführten allgemeinen topologischen Bedingungen an \mathcal{M} ist $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ eine raumorientierbare und durch $T : \mathcal{M} \rightarrow T\mathcal{M}$, $T(x) = (x, \mathbf{T}(x))$ zeitorientierte Raumzeit, für die das Spinbein-Bündel trivial ist [33, pp. 104, pp. 117].*

A.1.5 Singularitäten

Singularitäten spielen in der Physik eine wichtige Rolle. So ist in der Elektrostatik das kugelsymmetrische Coulomb-Feld $U(r) = \frac{e}{4\pi r}$ im Ursprung $r = 0$ singular, da dort eine unendlich große Ladungsdichte vorhanden ist, d.h. eine Punktladung. In der allgemeinen Relativitätstheorie sind Singularitäten sehr prominent. Einstein selbst hatte die Hoffnung, dass die Singularitäten eines Gravitationsfeldes Elementarteilchen darstellen würden und die allgemeine Relativitätstheorie damit automatisch eine Elementarteilchentheorie liefern würde. Diese Hoffnung hat sich nicht erfüllt [40, S. 196f]. Einstein betrachtete Singularitäten allgemein als Zeichen einer noch unvollständigen physikalischen Theorie, die bestenfalls als provisorische Artefakte auf dem Weg zu einer vollständigen Theorie der Materie akzeptabel seien [13, S. 12]. Dass Singularitäten in der allgemeinen Relativitätstheorie eine wichtige Rolle spielen und nicht nur unangenehme Nebenerscheinungen sind, wurde spätestens Ende der 1960er Jahre mit den Singularitätentheoremen von Hawking und Penrose [19, 21] deutlich, die unter recht allgemeinen und physikalisch plausiblen Annahmen sowohl an kosmologische Modelle als auch an isolierte Gravitationsquellen die Zwangsläufigkeit von Singularitäten bewiesen. Im einen Fall ist es eine Singularität wie der Urknall, im anderen Fall ist es die Singularität einer punktbzw. ringförmigen Masse im Zentrum Schwarzer Löcher. Die Singularitätentheoreme von Hawking und Penrose gelten als die wichtigsten Ergebnisse der modernen allgemeinen Relativitätstheorie und sind rein geometrische Sätze, wenn auch mit physikalisch motivierten Annahmen [13, S. 51f]. Singularitäten sind in der allgemeinen Relativitätstheorie nicht die seltene Ausnahme, sondern eher die Regel.

Wie definiert man nun eine Raumzeitsingularität? Eine *Singularität* in der allgemeinen Relativitätstheorie ist zunächst ein Punkt oder eine abgeschlossene Menge der Raumzeit, in der Komponenten des metrischen Tensors eine Polstelle oder eine Nullstelle haben. Dabei kann es sich aber durchaus um eine Koordinatensingularität handeln, also eine Singularität, die durch einen Koordinatenwechsel vermieden werden kann. Ein Beispiel für eine reine Koordinatensingularität sind die Pole der Kugelkoordinaten auf der Kugeloberfläche $S^2(r)$ aus Beispiel A.1.2. Die Komponente $g_{\varphi\varphi}$ des metrischen Tensors (A.22) verschwindet für $\theta = 0$ und π , obwohl die Geometrie an diesen Stellen nichts Außergewöhnliches aufweist. Auch im flachen dreidimensionalen Raum (Beispiel A.1.3) ist die Metrik für Kugelkoordinaten singular bei $r = 0$, obwohl auch hier der Raum keine besonderen Eigenschaften hat.

Im Allgemeinen ist eine Singularität des metrischen Tensors ein notwendiges Kriterium für eine echte Singularität der Raumzeit, jedoch kein hinreichendes. Hat man also eine Koordinatensingularität gefunden, so wird man untersuchen, ob sie sich durch einen Koordinatenwechsel beheben lässt. Physikalisch ausgedrückt bedeutet das in der allgemeinen Relativitätstheorie, dass man überprüft, ob ein frei fallender Beobachter dort ein lokales Minkowski-System verwenden kann, ob er also etwas Ungewöhnliches bemerkt. Da ein expliziter Koordinatenwechsel in der Regel mit hohem Aufwand realisiert ist, hat sich etwa seit den 1960er Jahren zur

Untersuchung lokaler Phänomene in Raumzeiten der Tetraden- oder Vierbeinormalismus etabliert. Insbesondere ist hier der Newman-Penrose-Formalismus [28] zu nennen, der auf Nulltetraden basiert, also lichtartigen Vektorfeldern, die in enger Verbindung zu Spinorfeldern stehen [9, 33, 34].

Allerdings liefert der Tetradenformalismus noch keine allgemeingültige Definition einer Singularität. Überhaupt bleibt festzustellen, dass eine strenge Definition einer Singularität in einer Raumzeit zur Zeit *nicht* existiert. Weithin akzeptiert ist eine Definition mittels der Unvollständigkeit von Kurven in der Raumzeit (*b-incompleteness*), siehe [20, S. 259]. Insbesondere ermöglicht sie eine reichhaltige Klassifizierung von Raumzeitsingularitäten [13, S. 37]. Ein Defizit dieser Definition ist jedoch, dass es auch in kompakten Raumzeiten Singularitäten geben kann, ein Fall, der in Räumen mit positiv-definiter Metrik („Riemann’schen Mannigfaltigkeiten“) nicht vorkommen kann, da dort Kompaktheit bereits Vollständigkeit impliziert (*missing point problem*); gemeinhin wird allerdings physikalisch ausgeschlossen, dass es kompakte Raumzeiten oder geschlossene zeitartige Kurven („Zeitmaschinen“) gibt, und in diesem Fall gibt es auch kein Defizit der Definition [13, S. 41f]).

Wir werden in diesem Abschnitt die Schwarzschild-Raumzeit zunächst mit Hilfe der Kruskal-Szekeres-Koordinaten untersuchen, die eine maximal-analytische Fortsetzung der Raumzeit darstellen.

Singularitäten der Schwarzschild-Raumzeit

Die Schwarzschild-Raumzeit hat in den Koordinaten (r, θ, φ, t) in Beispiel A.1.4 drei Koordinatensingularitäten, nämlich

$$r = 0, \quad r = 2M, \quad \theta = 0, \quad \theta = \pi. \quad (\text{A.95})$$

Die beiden letzten sind offensichtlich keine echten Singularitäten, sondern die wohl-bekannteren Koordinatensingularitäten der Kugelkoordinaten an den Polen. Für die beiden erstgenannten Koordinatensingularitäten ist die Situation zunächst nicht so einfach zu verstehen. In der Tat werden wir durch eine geeignete Koordinatentransformation erkennen, dass es sich bei $r = 2M$ um eine Koordinatensingularität handelt, bei $r = 0$ und $M > 0$ dagegen um eine echte Raumzeitsingularität.

Betrachten wir zunächst die kausale Struktur der Schwarzschild-Raumzeit. Wie in der Minkowski-Raumzeit ist die Kausalstruktur einer allgemeinen Raumzeit durch die jeweiligen Lichtkegel an den Raumzeitpunkten gegeben, wie in Abbildung A.4 dargestellt. In einer Schwarzschild’schen Raumzeit sind die Lichtkegel durch ein- und auslaufende Lichtstrahlen gegeben und haben die in Abbildung A.5 skizzierte Gestalt [30, §14.1]. Es ist dort zu erkennen, dass die aus dem Unendlichen einlaufenden Lichtstrahlen den Bereich $r = 2M$ nur asymptotisch erreichen, also nicht in endlicher Zeit. Ebenso sehen wir, dass von der näheren Umgebung von $r = 2M$ auslaufende Lichtstrahlen gerade noch ins Unendliche entkommen, aber selbst „auslaufende“ Lichtstrahlen mit einem Startpunkt $r < 2M$ zwangsläufig in den zentralen Punkt $r = 0$ gezogen werden. Die Kugel mit dem Radius $r = 2M$ stellt in der

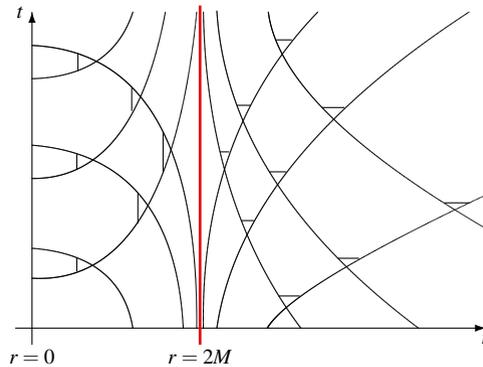


Abbildung A.5: Die Kausalstruktur der Schwarzschild-Raumzeit, die durch ein- und auslaufende Lichtstrahlen begrenzte Zukunftslichtkegel illustriert ist.

Schwarzschild'schen Raumzeit in den Koordinaten (r, θ, φ, t) also eine Grenze dar, die nicht zu überwinden zu sein scheint und innerhalb derer nicht einmal Lichtstrahlen nach außen treten können. Diese Grenze $r = 2M$ heißt *Ereignishorizont* der Schwarzschildraumzeit. Diese Raumzeit wird aufgrund der Eigenschaft auch als *Schwarzes Loch* mit dem Radius $r = 2M$ bezeichnet. Da das Koordinatensystem (r, θ, φ, t) das Bezugssystem eines Beobachters im Unendlichen darstellt, also eines „asymptotischen Beobachters“ für $r \rightarrow \infty$, sind für ihn alle Ereignisse innerhalb des Ereignishorizontes nie erfahrbar.

Die Kausalstruktur außerhalb des Horizonts ist sofort plausibel, denn sie ergibt sich zwangsläufig aus der Kausalstruktur eines asymptotischen Beobachters. Für die Kausalstruktur im Innern des Schwarzen Lochs allerdings, also im Bereich

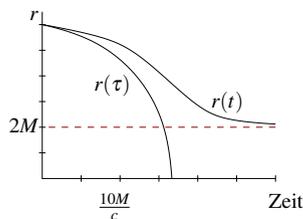


Abbildung A.6: Die radiale Entfernung r vom Ursprung eines Schwarzschild'schen Schwarzen Lochs, die ein in das Loch fallender Beobachter mit Startpunkt $r = 6M$ abhängig von der Zeit beschreibt. In seiner Eigenzeit τ überquert er nach kurzer Zeit den Ereignishorizont $r_+ = 2M$ und rast auf die Singularität zu, während er in der Zeit t eines Beobachters weit draußen den Horizont *nie erreicht*. Grafik aus [10].

$r < 2M$, benötigt man eine Betrachtung lokal frei fallender Beobachter, die den Ereignishorizont $r = 2M$ physikalisch überhaupt nicht bemerken und unweigerlich in die zentrale Singularität $r = 0$ fallen. In ihrem freien Fall aus dem Außenraum des Schwarzen Loches benötigen sie eine *endliche* Eigenzeit, während sie aus Sicht eines asymptotischen Beobachters noch nicht einmal den Horizont jemals erreichen,

wie in Abbildung A.6 illustriert [5, §19(a)], [30, §14.1]. Damit wird offensichtlich, dass die Natur der beiden Singularitäten $r = 0$ und $r = 2M$ nicht dieselbe ist. Denn immerhin bemerkt ein lokaler Beobachter, ob beschleunigt oder frei fallend, den Ereignishorizont überhaupt nicht, die zentrale Singularität aber zieht ihn unweigerlich an und wird ihn schon aufgrund der enormen Schwerkraftunterschiede bei sehr kurzen Distanzen ($r \rightarrow 0$) zerreißen. Wie kann man das im Rahmen der allgemeinen Relativitätstheorie beweisen? Eine Möglichkeit ist die Wahl eines geeigneten Wechsel des Bezugssystems, also eine geeignete Koordinatentransformation.

Beispiel A.1.10. (*Die Schwarzschild-Raumzeit in Kruskal-Szekeres-Koordinaten*) Wir führen die Kruskal-Szekeres-Koordinaten durch eine Transformation der Schwarzschild-Koordinaten aus Beispiel A.1.4 wie folgt ein:

$$w = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} e^{r/4M} \sinh \frac{ct}{4M}, \quad z = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} e^{r/4M} \cosh \frac{ct}{4M}, \quad (\text{A.96})$$

für den Bereich $r > 2M$ und

$$w = \sqrt{\frac{2M}{r} - 1} e^{r/4M} \cosh \frac{ct}{4M}, \quad z = \sqrt{\frac{2M}{r} - 1} e^{r/4M} \sinh \frac{ct}{4M}, \quad (\text{A.97})$$

für $r < 2M$ verwendet, wobei r in den Koordinaten implizit durch

$$\left(\frac{r}{2M} - 1\right) e^{r/2M} = z^2 - w^2 \quad (\text{A.98})$$

gegeben ist, also explizit durch

$$r(w, z) = 2M \left(1 + W\left(\frac{z^2 - w^2}{e}\right)\right) \quad (\text{A.99})$$

mit der Lambert'schen W-Funktion.³ Da $W(z) \leq 1$, gilt stets $r(w, z) \leq 0$. Ferner folgt $r(w, z) = 0$ genau dann, wenn $w^2 - z^2 = 1$, denn $W(x) = -1$ ist äquivalent zu $x = -1/e$. Wegen

$$\frac{w}{z} = \begin{cases} \tanh \frac{ct}{4M} & \text{für } r > 2M, \\ \coth \frac{ct}{4M} & \text{für } r < 2M, \end{cases} \quad z^2 - w^2 = \left(\frac{r}{2M} - 1\right) e^{r/2M} \quad (\text{A.100})$$

lassen sich (t, r) umgekehrt durch (w, z) ausdrücken:

$$ct = \begin{cases} 4M \operatorname{artanh} w/z & \text{für } r > 2M, \\ 4M \operatorname{arcoth} w/z & \text{für } r < 2M, \end{cases} \quad r = 2M \left(1 + W\left(\frac{z^2 - w^2}{e}\right)\right) \quad (\text{A.101})$$

Oft werden als Kruskal-Koordinaten die Lichtkegelkoordinaten

$$u = w - z \quad \text{und} \quad v = w + z \quad (\text{A.102})$$

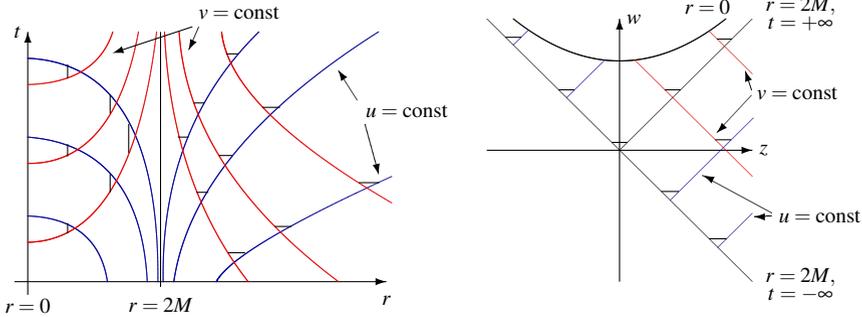


Abbildung A.7: Koordinatentransformation der Schwarzschildkoordinaten (t, r) in die Kruskal-Szekeres-Koordinaten (w, z) , in denen ein- und auslaufende Lichtstrahlen als Geraden erscheinen und die eingezeichneten Zukunftslichtkegel begrenzen.

betrachtet, wobei $u = \text{const}$ auslaufende Lichtstrahlen beschreibt und $v = \text{const}$ einlaufende Lichtstrahlen, vgl. [3, §13.3.2], [5, S. 85ff], [37, §8.4], [40, S. 200ff]. Die Koordinate u ist die *retardierte Zeit*, die Koordinate v ist die *fortgeschrittene Zeit* [34, S. 292], im Zusammenhang mit der Wellengleichung werden sie auch *charakteristische Parameter* genannt [36, S. 378].

Der metrische Tensor für die Kruskal-Szekeres-Koordinaten (z, θ, φ, w) lautet

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} -\frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 \sin^2 \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} \end{pmatrix}, \quad (\text{A.103})$$

d.h. die Determinante ist $g = -1024M^6 r^2 \sin^2 \theta$. Die einzige Singularität in diesen Koordinaten ist bei $r = 0$, also mit Gleichung (A.99) wegen $W(-1/e) = -1$ für

$$w^2 - z^2 = 1. \quad (\text{A.104})$$

In den Kruskal-Szekeres-Koordinaten beschreibt die Singularität $r = 0$ also eine Hyperbel. \square

Eine genauere Betrachtung der Abbildung A.7 zeigt, dass dort das gesamte Raumzeitgebiet (t, r) mit $t \in \mathbb{R}$ und $r > 0$ auf den Bereich $w \geq -z$ der Koordinatenebene (w, z) transformiert wird. Hierbei repräsentiert die Gerade $w = -z$, oder $v = 0$, in den (t, r) -Koordinaten einen von $r = 2M$ einlaufenden Lichtstrahl zum Zeitpunkt $t = -\infty$, der diesen Bereich nie verlässt. Entsprechend stellt die Halbgerade $w = z > 0$ oder $u = 0$ einen von $r = 2M$ zur Zeit $t = -\infty$ auslaufenden

³ https://de.wikipedia.org/wiki/Lambertsche_W-Funktion

Lichtstrahl dar, der zum Zeitpunkt $t = +\infty$ immer noch bei $r = 2M$ ist. Diese auf den ersten Blick widersprüchlichen oder seltsamen Erscheinungen haben ihre Ursache an der Kompaktifizierung der Koordinatentransformation $(w, z) \mapsto (t, r)$, die die Gerade $\{w = -z\}$ und die Halbgerade $\{w = z > 0\}$ auf die Gerade $\{r = 2M\}$ kontrahiert. Dadurch erscheinen die beiden Geraden in den (t, r) -Koordinaten als physikalisch ununterscheidbar.

So natürlich die Transformation der Halbebene $\{(t, r) : r > 0\}$ auf die Halbebene $\{(w, z) : w > -z, r > 0\}$ in Abbildung A.7 erscheint, so unnatürlich erscheint in den Kruskal-Szekeres-Koordinaten die Einschränkung auf nur eine Halbebene. In der Tat lässt sich die Halbebene dort an der Achse $w = -z$ spiegeln, so dass die Lichtstrahlen $u = \text{const}$ fortgesetzt werden können und wir die Ebene in Abbildung A.8 erhalten, die *Kruskalebene* [5, §17(b)]. Hier werden die Bereiche $r > 2M$ der

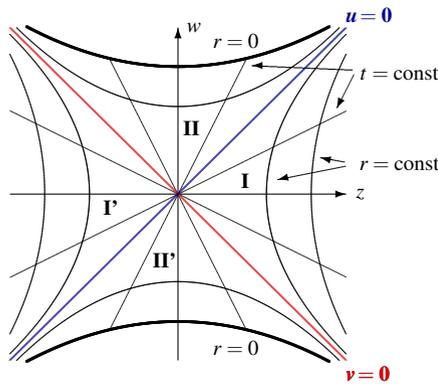


Abbildung A.8: Die Kruskalebene, die maximale analytische Erweiterung der Schwarzschild-Raumzeit mit den Kruskal-Szekeres-Koordinaten.

Schwarzschildkoordinaten also auf die Bereiche I und I' abgebildet, während der Innenraum des Schwarzen Lochs auf die Bereiche II und II' abgebildet wird. Kein Lichtstrahl kann je aus den Bereichen II und I' nach I gelangen, allerdings sind Ereignisse aus II' in I erfahrbar. Aus Sicht eines Beobachters im Außenraum I der Schwarzschildraumzeit ist nur der Bereich II hinter dem Ereignishorizont $r = 2M$ kausal erreichbar, allerdings kann von dort physikalisch nach außerhalb keine Information gelangen, daher die Bezeichnung „Schwarzes Loch“ für Region II. Aus Region II' dagegen können ihn Signale aus der Vergangenheit erreichen, aber dort kann keine Information aus I oder den anderen Bereichen empfangen werden; Region II' wird daher oft als „Weißes Loch“ und die Singularität $\{r = 0, w < 0\}$ als *vergangene Singularität* bezeichnet [37, S. 271], [40, S. 203]. Dagegen ist Region I' sowohl für alle Vergangenheit als auch für alle Zukunft für den Beobachter in I kausal unerreichbar und daher für ihn physikalisch irrelevant.

Ist ein Weißes Loch physikalisch realistisch? Da die vergangene Singularität be-

reits zur (Koordinaten-) Zeit $t = -\infty$ existiert haben musste, muss ein Weißes Loch bereits seit Anbeginn der Welt existieren. Gemeinhin nimmt man jedoch an, dass Massen und Gravitationsfelder, die zumindest näherungsweise durch die Schwarzschildraumzeit beschrieben werden, im Laufe der Zeit erst entstanden sind und nicht von Anfang an existierten. Damit würden Weiße Löcher in unserer Welt nicht existieren [40, S. 203].

A.2 Beweis der Äquivalenz von (2.1) und (2.2)

Lemma A.2.1. *Die Formulierungen (2.1) und (2.2) der Einstein'schen Feldgleichungen sind äquivalent.*

Beweis. Hochziehen der Indizes durch g^{ij} in (2.2) ergibt wegen $g^{ij}R_{ij} = R^i_i = R$ (nach Definition von R !) und $g^{ij}g_{ij} = \delta^i_i = \text{Spur } g_{ij} = -2$ sofort $R - 2R = -\kappa T$, oder äquivalent $R = \kappa T$; Gleiches folgt aber auch für die originalen Einstein'schen Gleichungen $R_{ij} = -\kappa(T_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}T)$. \square

Literaturverzeichnis

- [1] ABRAHAM, R. ; MARSDEN, J. E. ; RATIU, T. : *Manifolds, Tensor, Analysis, and Applications*. Reading : Addison-Wesley, 1983
- [2] BEEM, J. K. ; EHRLICH, P. E.: *Global Lorentzian Geometry*. New York : Marcel Dekker, 1981
- [3] BOBLEST, S. ; MÜLLER, T. ; WUNNER, G. : *Spezielle und allgemeine Relativitätstheorie. Grundlagen, Anwendungen in Astrophysik und Kosmologie sowie relativistische Visualisierung*. Berlin Heidelberg : Springer, 2015. – <https://books.google.de/books?id=UvyzCgAAQBAJ>
- [4] BORN, M. : *Die Relativitätstheorie Einsteins. Kommentiert und erweitert von Jürgen Ehlers und Markus Pössel*. Berlin Heidelberg : Springer, 2001. – <https://books.google.com/books?id=xR4fBgAAQBAJ>
- [5] CHANDRASEKHAR, S. : *The Mathematical Theory of Black Holes*. Oxford : Oxford University Press, 1983. – <http://books.google.com/books?id=LBOVcrzFfhsC>
- [6] CHOQUET-BRUHAT, Y. ; WITT-MORETTE, C. de ; DILLARD-BLEICK, M. : *Analysis, Manifolds and Physics*. Amsterdam : North-Holland Publ. Co., 1982
- [7] CLARK, R. W.: *Albert Einstein. Leben und Werk*. Herbig Sonderausgabe 1979. Esslingen : Bechtle, 1974
- [8] DE VRIES, A. : *Über die Beschränktheit der Energienorm bei der Evolution der Dirac-, Weyl- und Maxwellfelder in gekrümmten Raumzeiten*. Bochum : Brockmeyer, 1994. – <http://math-it.org/Publikationen/diss.pdf>
- [9] DE VRIES, A. : ‘The evolution of the Weyl and Maxwell fields in curved space-times’. In: *Math. Nachr.* 179 (1996), S. 27–45. – DOI 10.1002/mana.19961790103
- [10] DE VRIES, A. : ‘Die Relativität der Information’. In: MUNO, R. W. (Hrsg.): *Jahresschrift der Bochumer Interdisziplinären Gesellschaft eV 2004*. Stuttgart

- : ibidem-Verlag, 2006, S. 11–38. – <http://www.math-it.org/Publikationen/Information.pdf>
- [11] DE VRIES, A. ; BÜHRKE, T. (Hrsg.) ; WENGENMAYR, R. (Hrsg.): *Beobachtbarkeit Schwarzer Löcher. Im Schatten Schwarzer Löcher*. 2. Wiley, 2009 (Physik in unserer Zeit). – <http://books.google.de/books?id=FbTs5M3Rn58C>
- [12] D’INVERNO, R. : *Introducing Einstein’s Relativity*. Oxford : Clarendon Press, 1992
- [13] EARMAN, J. : *Bangs, Crunches, Whimpers, and Shrieks. Singularities and Acausalities in Relativistic Spacetimes*. New York Oxford : Oxford University Press, 1995. – https://books.google.com/books?id=0i6_tGn2aLMC
- [14] EINSTEIN, A. : ‘Die formale Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie’. In: *Sitzungsber. Königl. Preuß. Akad. Wiss., phys.-math. Klasse II* (1914), S. 1030–1085. – <http://adsabs.harvard.edu/abs/1914SPAW.....1030E>
- [15] EINSTEIN, A. : ‘Die Feldgleichungen der Gravitation’. In: *Sitzungsber. Königl. Preuß. Akad. Wiss., phys.-math. Klasse II* (1915c), S. 844–847. – <http://adsabs.harvard.edu/abs/1915SPAW.....844E>
- [16] FÖLSING, A. : *Albert Einstein. Eine Biographie*. Frankfurt : Suhrkamp, 1993
- [17] FORSTER, O. : *Analysis 2*. 4. Braunschweig Wiesbaden : Vieweg, 1981
- [18] GEROCH, R. : ‘Spinor structure of space-times in General Relativity. I’. In: *Journ. Math. Phys.* 9 (1968), Nr. 11, S. 1739–1744
- [19] HAWKING, S. W.: ‘The occurrence of singularities in cosmology’. In: *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 294 (1966), Nr. 1439, S. 511–521. – DOI 10.1098/rspa.1966.0221
- [20] HAWKING, S. W. ; ELLIS, G. F. R.: *The Large Scale Structure of Space-time*. Cambridge : Cambridge University Press, 1973
- [21] HAWKING, S. W. ; PENROSE, R. : ‘The singularities of gravitational collapse and cosmology’. In: *Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences* 314 (1970), Nr. 1519, S. 529–548. – DOI 10.1098/rspa.1970.0021
- [22] HUBBLE, E. : ‘A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebulae’. In: *PNAS* 15 (1929), Nr. 3, S. 168–173. – DOI 10.1073/pnas.15.3.168

- [23] JANSSEN, M. ; RENN, J. : ‘Einsteins Weg zur allgemeinen Relativitätstheorie’. In: *Spektrum der Wissenschaft* 10 (2015), S. 49–55. – <http://spektrum.de/artikel/1362267>
- [24] KARTTUNEN, H. ; KRÖGER, P. ; OJA, H. ; POUTANEN, M. ; DONNER, J. : *Fundamental Astronomy*. 2nd. Berlin Heidelberg New York : Springer Verlag, 2000
- [25] LANDAU, L. D. ; LIFSCHITZ, E. M.: *Klassische Feldtheorie*. 12. Frankfurt : Harri Deutsch, 1997
- [26] LEMAÎTRE, G. : ‘Un Univers homogène de masse constante et de rayon croissant rendant compte de la vitesse radiale des nébuleuses extragalactiques’. In: *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles* A47 (1927), S. 49–59. – <http://adsabs.harvard.edu/abs/1927ASSB...47...49L>
- [27] MESCHÉDE, D. (Hrsg.): *Gerthsen Physik*. 25. Berlin Heidelberg : Springer Verlag, 2015. – <https://books.google.com/books?id=qW7dBgAAQBAJ>
- [28] NEWMAN, E. T. ; PENROSE, R. : ‘An approach to gravitational radiation by a method of spin coefficient’. In: *J. Math. Phys.* 3 (1962), Nr. (3), S. 566–577
- [29] OLBERS, H. W. M.: ‘Ueber die Durchsichtigkeit des Weltraumes’. In: *Astronomisches Jahrbuch* (1826). – <https://archive.org/stream/wilhelmolberssei00olbeuoft#page/132/mode/2up>
- [30] OLOFF, R. : *Geometrie der Raumzeit. Eine mathematische Einführung in die Relativitätstheorie*. 2. Braunschweig Wiesbaden : Vieweg Verlag, 2002
- [31] O’NEILL, B. : *Semi-Riemannian Geometry. With Applications to Relativity*. San Diego : Academic Press, 1983
- [32] PASCUAL-SÁNCHEZ, J.-F. : ‘Introducing relativity in global navigation satellite systems’. In: *Annalen der Physik* 16 (2007), Nr. 4, S. 258–273. – ISSN 1521–3889. – DOI 10.1002/andp.200610229
- [33] PENROSE, R. ; RINDLER, W. : *Spinors and Space-Time. Vol. 1: Two-Spinor Calculus and Relativistic Fields*. Cambridge : Cambridge University Press, 1984
- [34] PENROSE, R. ; RINDLER, W. : *Spinors and Space-Time. Vol. 2: Spinor and Twistor Methods in Space-Time Geometry*. Cambridge : Cambridge University Press, 1986
- [35] SACHS, R. K. ; WU, H.-H. : *General Relativity for Mathematicians*. New York : Springer-Verlag, 1977

- [36] SAUVIGNY, F. : *Partielle Differentialgleichungen der Geometrie und der Physik. Grundlagen und Integraldarstellungen*. Berlin Heidelberg : Springer-Verlag, 2004
- [37] SEXL, R. U. ; URBANTKE, H. K.: *Gravitation und Kosmologie. Eine Einführung in die Allgemeine Relativitätstheorie*. Mannheim Wien Zürich : BI Wissenschaftsverlag, 1987
- [38] SINGER, S. F.: ‘Application of an Artificial Satellite to the Measurement of the General Relativistic “Red Shift”’. In: *Phys. Rev.* 104 (1956), Oct, S. 11–14. – DOI 10.1103/PhysRev.104.11
- [39] SONNE, B. ; WEISS, R. : *Einsteins Theorien. Spezielle und Allgemeine Relativitätstheorie für Einsteiger und zur Wiederholung*. Berlin Heidelberg : Springer Spektrum, 2013
- [40] STEPHANI, H. : *Allgemeine Relativitätstheorie*. Berlin : Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1991
- [41] STRAUMANN, N. : *Allgemeine Relativitätstheorie und relativistische Astrophysik*. Berlin : Springer-Verlag, 1988
- [42] SULANKE, R. ; WINTGEN, P. : *Differentialgeometrie und Faserbündel*. Berlin Basel : Deutscher Verlag der Wissenschaften / Birkhäuser, 1972
- [43] TIPLER, F. J.: ‘Johann Mädler’s Resolution of Olbers’ Paradox’. In: *Quat. J. Roy. Astr. Soc.* 29 (1988), S. 313–325. – <http://adsabs.harvard.edu/abs/1988QJRAS...29..313T>
- [44] UNSÖLD, A. ; BASCHEK, B. : *Der neue Kosmos. Einführung in die Astronomie und Astrophysik*. 6. Berlin Heidelberg New York : Springer Verlag, 1999

Web-Links

- [CoS] <http://arxiv.org/abs/0904.4184v2> – T. Müller & F. Grave (2011): *Catalogue of Spacetimes*. Umfassender Katalog exakter vierdimensionaler Lösungen der Einstein’schen Feldgleichungen, mit Angabe der Christoffelsymbole und den wesentlichen Komponenten des metrischen, Riemann’schen und Ricci’schen Tensors.
- [DE] http://www.deutschlandfunk.de/allgemeine-relativitaetstheorie-der-wertvollste-fund-meines.740.de.html?dram:article_id=319747 – Dokumentation des Deutschlandfunks über Bedeutung und Entstehungsgeschichte der allgemeinen Relativitätstheorie.

- [EA] <http://www.alberteinstein.info/> – Einstein Archives Online. Informationen und Digitalisate von Einsteins Notizen und Schriften.
- [EJ] <http://www.einsteinjahr.de/> – Einsteinjahr 2005. Informationen über Einstein und sein Werk, initiiert von der deutschen Bundesregierung, Wissenschaft, Wirtschaft und Kultur
- [EO] <http://www.einstein-online.info/> – Webportal mit allgemeinverständlichen Informationen zu Einsteins Relativitätstheorien, gestaltet vom Max-Planck-Institut für Gravitationsphysik
- [PP] <http://www.physicspages.com/2013/12/25/christoffel-symbols-for-schwarzschild-metric/> – Physics Pages (2013): *Christoffel symbols for the Schwarzschild metric*.
- [Sch] <http://theory.gsi.de/~vanhees/faq/gravitation/node65.html> – Florian Schrack (2002): Berechnung der Christoffelsymbole für die Schwarzschildraumzeit

Index

- Alter des Weltalls, 18
Array, 40
asymptotischer Beobachter, 53
- Big Crunch, 48
- charakteristische Parameter, 55
Christoffelsymbole, 39
- Einstein, Albert (1879–1955), 4
Einstein'sche Summenkonvention, 37
Ereignishorizont, 53
- freier Wille, 49
- Gauß, Carl Friedrich (1777–1855), 28
Geodäte, 27
GPS, 20
- Hubble-Konstante, 18
- Jacobi-Matrix, 37
- Karte, 35
kausal, 49
kausale Struktur, 52
Kausalität, 49
Koordinaten, 36
Koordinatensingularität, 51
kosmische Zeit, 17
Kotangentenraum, 38
Kretschmann, Erich Justus (1887–1973), 46
Kretschmann'scher Krümmungsskalar, 46, 48
Kruskal-Szekeres-Koordinaten, 54
Kruskalenebene, 56
- Lambert-Funktion, 54
Levi-Civita, Tullio (1873–1941), 29
lichtartig, 49
Lichtkegel, 50
- Mößbauer-Effekt, 30
- metrischer Tensor, 11, 38
Minkowski-Raumzeit, 14
- Olbers'sches Paradoxon, 19
- Plattkarte, 36
prinzipales Vierbein-Bündel, 49
- raumartig, 49
Raumzeit, 29
Ricci-Curbastro, Gregorio (1853–1925), 29
Ricci-Skalar, 40
Ricci-Tensor, 40
Riemann, Bernhard (1826–1866), 29
Riemann-Tensor, 39
- Schwarzes Loch, 15, 53
schwere Masse, 26
Signatur des metrischen Tensors, 39
Singularität, 36, 51
Summenkonvention, 37
- Tangentenraum, 37
Tensorfeld, 37
träge Masse, 25
- Urknall, 48
- Vakuumlösungen, 14
Vergangenheit, 50
- Weißes Loch, 56
Weltende, 48
Wille, 49
- zeitartig, 49
Zeitmaschine, 52
Zukunft, 50