Schwingungen und komplexe Zahlen

Andreas de Vries

FH Südwestfalen University of Applied Sciences, Haldener Straße 182, D-58095 Hagen, Germany

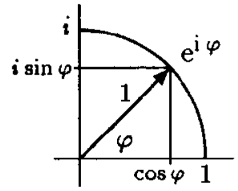
e-mail: de-vries@fh-swf.de

Hagen, im Mai 2012 (Erste Version: November 2006)

1 Die komplexe Darstellung

Häufig ist es notwendig, Summen sinusförmiger Schwingungen oder Wellen zu bilden, sog. *Überlagerungen*, oft in Kombination mit Phasenverschiebungen. Das geht prinzipiell mit Hilfe der Additionstheoreme der Kreisfunktionen — und großem Rechenaufwand. Erstaunlich einfach wird es aber mit der komplexen Darstellung in $\mathbb{C}$. Grundlage ist die Eulersche Formel:

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{e}^{i\varphi} &= \cos\varphi + i\sin\varphi, \\ \cos\varphi &= \mathrm{Re}\,\mathrm{e}^{i\varphi}, \quad \sin\varphi = \mathrm{Im}\,\mathrm{e}^{i\varphi}. \end{aligned}} \tag{1}$$



In der komplexen Ebene lassen sich damit nämlich Schwingungen und Wellen als einfache Kreisbewegung auffassen (Abb. 1). Jeder sinusförmige Schwingungsvorgang $f(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$ mit der Kreisfrequenz $\omega \geqq 0$ und den Amplituden $a, b \in \mathbb{R}$ lässt sich also schreiben als[1]

$$f(t) = a\,\mathrm{Re}\ \mathrm{e}^{i\omega t} + b\,\mathrm{Im}\ \mathrm{e}^{i\omega t} = \mathrm{Re}\left((a - ib)\,\mathrm{e}^{i\omega t}\right). \tag{2}$$

Was hindert uns also daran, einfach direkt die viel einfachere *komplexe* Funktion $f(t) = A\mathrm{e}^{i\omega t}$ (mit der komplexen Amplitude $A = a - ib$!) zu betrachten?

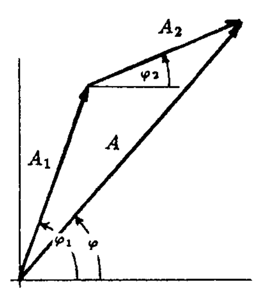
Vor allem durch die folgenden beiden Gleichungen wird die Eleganz und Einfachheit der komplexen Darstellung begründet:

$$A\,\mathrm{e}^{i(\omega t+\varphi)} = B\,\mathrm{e}^{i\omega t} \text{mit} \qquad B := A\,\mathrm{e}^{i\varphi} \qquad (A \in \mathbb{C}).$$

$$A\mathrm{e}^{i\varphi} = A_1\mathrm{e}^{i\varphi_1} + A_2\mathrm{e}^{i\varphi_2} \qquad (A, A_1, A_2 \in \mathbb{C}),$$

$$\Longleftrightarrow \tag{3}$$

$$A\mathrm{e}^{i(\omega t+\varphi)} = A_1\mathrm{e}^{i(\omega t+\varphi_1)} + A_2\mathrm{e}^{i(\omega t+\varphi_2)}.$$



[1] Die zweite Gleichung folgt direkt, wenn man für eine beliebige Zahl $z \in \mathbb{C}$ verifiziert: $\mathrm{Re}\,(-iz) = \mathrm{Im}\,z$.

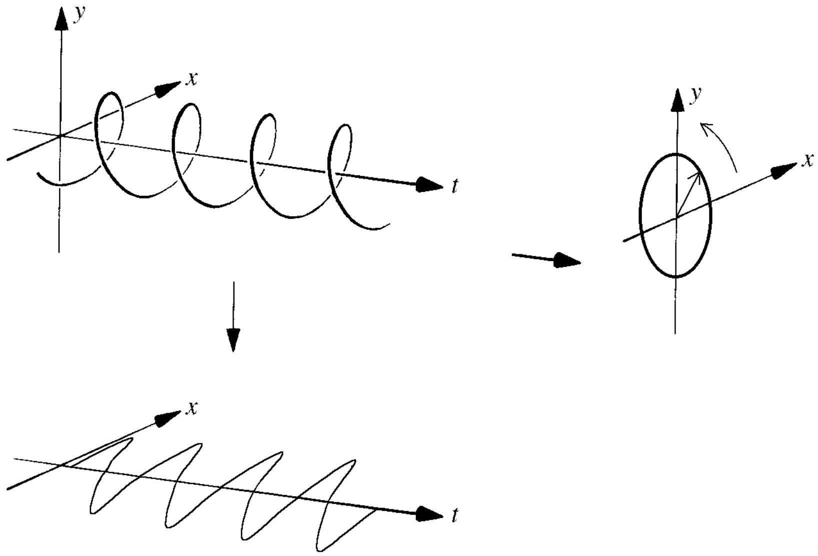


Abbildung 1: Die Schwingung $e^{i(\omega t+\varphi)}$ ist als Graph gegen die Zeit t eine Schraubenlinie (*Helix*). Sie lässt sich einerseits als Kreisbewegung in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ auffassen (rechts, Projektion auf die x-y-Ebene), andererseits als Sinusschwingung im Reellen (unten, Projektion auf die x-t-Ebene).

Die erste Gleichung besagt, dass eine **Phasenverschiebung** um φ nichts weiter als eine **Multiplikation** mit dem Faktor $e^{i\varphi}$ ist. Die zweite Gleichung stellt eine **Überlagerung** von Schwingungen *derselben* Frequenz einfache vektorielle **Addition** in der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ dar! Nach dem Cosinussatz und dem Sinussatz in einem allgemeinen Dreieck [4, S. 759] gelten für das Dreieck in der Abbildung in Gleichung (3) rechnerisch die komplizierten Beziehungen

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2\cos(\pi - \varphi_1 + \varphi_2), \qquad \sin(\varphi_1 - \varphi) = \frac{A_2}{A}\,\sin(\pi - \varphi_1 + \varphi_2). \tag{4}$$

Die vektorielle Darstellung in (3) in der komplexen Ebene wird *Zeigerdarstellung* genannt. Was das für eine Vereinfachung bedeutet, macht Abb. 2 deutlich: Anstatt aufwendig Additionstheo-

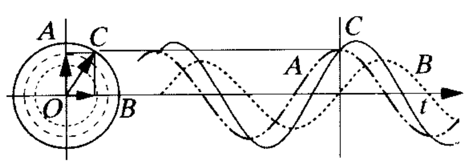


Abbildung 2: Die Addition zweier sinusförmiger Schwingungen gleicher Frequenz, aber verschiedener Amplitude und Phase ist im Zeigerdiagramm viel einfacher.

reme zu verwenden und mit Unterstützung von Computern Berechnungen durchzuführen, haben wir im Prinzip in den komplexen Vektoren bereits alle notwendigen Informationen. Der Formalismus der Zeigerdarstellung liefert sie uns „frei Haus“.

Überlagerung zweier Schwingungen. Betrachten wir dazu etwas detaillierter die Überlagerung der beiden Schwingungen $f_1(t) = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$ und $f_2(t) = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$ derselben Frequenz ω gegeben durch $f_1(t)+f_2(t)$, d.h. mit Hilfe der Beziehungen $f_j(t) = \mathrm{Im}\, \mathrm{e}^{i(\omega t+\varphi_j)}$ und den Bezeichnungen in (3) einfach

$$f_1(t)+f_2(t) = \mathrm{Im}\left[A_1\,\mathrm{e}^{i(\omega t+\varphi_1)} + A_2\,\mathrm{e}^{i(\omega t+\varphi_2)}\right] = \mathrm{Im}\left[(A_1\,\mathrm{e}^{i\varphi_1} + A_2\,\mathrm{e}^{i\varphi_2})\,\mathrm{e}^{i\omega t}\right] = \mathrm{Im}\left[A\,\mathrm{e}^{i(\omega t+\varphi)}\right],$$

also kurz zusammengefasst

$$f_1(t)+f_2(t) = A\sin(\omega t+\varphi). \tag{5}$$

Die Überlagerung zweier Schwingungen derselben Frequenz resultiert also in einer Schwingung mit veränderter Amplitude und Phase gemäß der Abbildung in Gleichung (3).

Komplizierter wird es, wenn wir die Überlagerung von Schwingungen *verschiedener* Frequenz untersuchen wollen, also $f_1(t) = A_1\sin(\omega_1 t+\varphi_1)$ und $f_2(t) = A_2\sin(\omega_2 t+\varphi_2)$. Dann erhalten wir entsprechend wie oben

$$\begin{aligned} f_1(t)+f_2(t) &= \mathrm{Im}\left[A_1\,\mathrm{e}^{i(\omega_1 t+\varphi_1)} + A_2\,\mathrm{e}^{i(\omega_2 t+\varphi_2)}\right] \\ &= \mathrm{Im}\left[\mathrm{e}^{i\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}}\left(A_1\,\mathrm{e}^{i\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}}\,\mathrm{e}^{i\omega_1 t} + A_2\,\mathrm{e}^{-i\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}}\,\mathrm{e}^{i\omega_2 t}\right)\right] \end{aligned} \tag{6}$$

Das kann man in dieser Allgemeinheit zwar leider nicht weiter vereinfachen. Allerdings ist dieser Term in der Darstellung der komplexen Zahlen immer noch deutlich einfacher und kompakter, als wenn wir ihn in trigonometrischen Funktionen ausgedrückt hätten. Aus dieser allgemeinen Gleichung kann man nun beispielsweise für den Spezialfall einer Überlagerung zweier Schwingungen mit gleichen Frequenzen ($\omega_1 = \omega_2 = \omega$) und gleichen Amplituden ($A_1 = A_2 = A$) die Beziehung ableiten:

$$f_1(t)+f_2(t) = 2A\cos\left(\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}\right)\,\sin\left(\omega t+\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}\right). \tag{7}$$

denn mit (6) und der Beziehung $\cos x = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{ix}+\mathrm{e}^{-ix})$ gilt

$$f_1(t)+f_2(t) = \mathrm{Im}\left[A\,\mathrm{e}^{i(\omega t+\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2})}\left(\mathrm{e}^{i\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}} + \mathrm{e}^{-i\frac{\varphi_1-\varphi_2}{2}}\right)\right] \tag{8}$$

Bei einer Überlagerung von Schwingungen gleicher Frequenz und Amplitude entsteht also eine Schwingung derselben Frequenz, deren Amplitude von der Differenz der Phasen der beiden ursprünglichen Schwingungen abhängt und deren Phase das Mittel der Phasen der ursprünglichen Schwingungen ist. Für gleiche Phasen der Wellen ($\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$) wird der Cosinus Eins, d.h.

$$f_1(t)+f_2(t) = 2A\sin(\omega t+\varphi). \tag{9}$$

Die Amplitude verdoppelt sich also gegenüber den Ausgangsamplituden, man spricht von *konstruktiver Interferenz*. Für eine Phasendifferenz von 180°, also $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$, wird in Gleichung (7) der Cosinus Null, d.h. die resultierende Schwingung verschwindet, $f_1(t)+f_2(t) = 0$. Dies entspricht der sogenannten *destruktiven Interferenz*.

Die komplexe Inversion. Die *Inversion* einer komplexen Zahl z ist die Abbildung $z \mapsto w = 1/z$ in der komplexen Ebene, also als eine Transformation in $\mathbb{C}$. Am einfachsten berechnet man sie in der Polardarstellung:

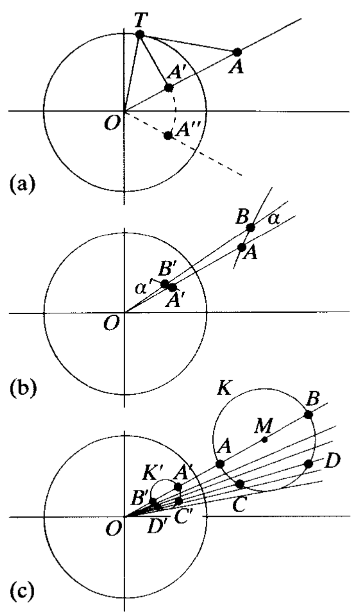
$$z = r\,\mathrm{e}^{i\varphi} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{1}{z} = \frac{1}{r}\,\mathrm{e}^{-i\varphi}. \tag{10}$$

Die Inversion besteht aus zwei Schritten:

1. Kehrwertbildung des (reellen!) Betrages r: $r \mapsto 1/r$;

2. Komplexe Konjugation: Vorzeichenwechsel des Argumentes, $\varphi \mapsto -\varphi$.

Die komplexe Inversion ist geometrisch eine Spiegelung am Einheitskreis und an der reellen Achse. Auch diese besteht aus zwei Schritten, die genau den obigen entsprechen:



(a) Spiegelung am Einheitskreis: Die Tangentenkonstruktion aus der nebenstehenden Abbildung (a) liefert den Bildpunkt A' von A mit $OA' = 1/OA$ (denn die Dreiecke OTA' und OAT sind ähnlich, also $OA'/OT = OT'/OA$; aber $OT = 1$!). Da r in der komplexen Ebene genau OA entspricht, $r = OA$, bewirkt die Spiegelung am Einheitskreis genau die Transformation $r\,\mathrm{e}^{i\varphi} \mapsto \frac{1}{r}\,\mathrm{e}^{i\varphi}$.

(b) Die komplexe Konjugation entspricht genau einer Spiegelung an der reellen Achse, die A' in A'' überführt.

Eine Abbildung heißt *winkeltreu* oder *konform*, wenn Winkel unter ihr (bis auf den Drehsinn) invariant bleiben, und *kreistreu*, wenn sie Kreise auf Kreise transformiert; Geraden werden dabei als Kreise mit Radius ∞ aufgefasst.
Die Inversion hat zwei sehr wichtige Eigenschaften, die wir in folgendem Lemma beweisen:

Lemma 1.1. *Die komplexe Inversion ist winkeltreu und kreistreu.*

Beweis. (i) Winkeltreue: Es genügt, die Erhaltung des Winkels gegen einen Radius zu beweisen, denn jeder beliebige Winkel lässt sich aus zwei Winkeln gegen denselben Radius zusammen setzen. Sei nun AB in obiger Abbildung (b) sehr klein. Die Dreiecke $OA'B'$ und OBA sind ähnlich, denn $OA' \cdot OA = OB' \cdot OB = 1$, also $OA'/OB' = OB/OA$. Es folgt $\alpha = \alpha'$, nur der Drehsinn beider Winkel ist umgekehrt.

(ii) Kreistreue: K' sei das gesuchte Bild eines Kreises K, siehe obige Abbildung (c). Wir ziehen zunächst den Radius OM. Drehen wir diesen Radius langsam, so wächst K' aus den Punkten A' und B' heraus, indem man jedesmal den Winkel überträgt, den K mit diesem Radius bildet.

Wegen der Winkeltreue kann also K' nichts anderes sein als ein ähnliches Bild von K. Der Vergrößerungsfaktor ist OB'/OA. Wenn speziell $OA = 0$ (d.h. K geht durch 0), so wird K' unendlich aufgebläht, ist also eine Gerade (= Kreis mit Radius ∞). □

Die Inversion $z \mapsto w = 1/z$ wird oft als eine Transformation von der „z-Ebene" in die „w-Ebene" aufgefasst. Wir halten folgende Inversionsregeln fest:

Inversionsregeln

z-Ebene		w-Ebene
Gerade durch 0	$\mapsto$	*Gerade* durch 0
Gerade nicht durch 0	$\mapsto$	*Kreis* durch 0
Mittelpunktskreis	$\mapsto$	*Mittelpunktskreis*
Kreis durch 0	$\mapsto$	*Gerade* nicht durch 0
Kreis nicht durch 0	$\mapsto$	*Kreis* nicht durch 0

Faustregeln:

1. Der Punkt mit dem *kleinsten* Abstand r vom Nullpunkt führt zu einem Punkt mit dem *größten* Abstand und umgekehrt.

2. Punkte *oberhalb* der reellen Achse werden in Bildpunkte *unterhalb* der reellen Achse transformiert und umgekehrt.

2 Anwendung komplexer Zahlen bei Wechselstromwiderständen

Wir betrachten im Folgenden einen Wechselstrom, der durch eine gegebene Schaltung fließt. Bei einer Spule und einem Kondensator kommt es dabei zu Phasenverschiebungen, die den sog. Blindstrom verursachen.

Es sei ein Wechselstrom mit der Spannung

$$U = U(t) = U_0 \cos \omega t, \qquad I = I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi). \tag{11}$$

gegeben. Hierbei sind $U_0, I_0 > 0$ die Amplitude, φ eine (zunächst unspezifizierte) Phasenverschiebung und $\omega > 0$ die Kreisfrequenz (d.h. $f = \omega/(2\pi)$ die *Frequenz*; eine Frequenz von 50 Hz ist also genau dann gegeben, wenn $\omega = 100\pi \approx 314,15\ \mathrm{s}^{-1}$). Wir werden oft aber ω einfach kurz „Frequenz" nennen, es sei denn im jeweiligen Zusammenhang kommt es auf die genaue Unterscheidung an. Der Kreisfrequenz ω entspricht die Periode oder Schwingungsdauer $T = 2\pi/\omega$ $(= 1/f)$.

Für den Grenzfall $\omega = 0$ erhalten wir einen Wechselstrom mit konstanter Spannung, also einen Gleichstrom.

Wir werden nun, ganz nach unserer nach Gleichung (2) gewonnen Erkenntnis, Spannung und Strom gemäß (11) schreiben als *komplexe* Funktionen:

$$U = U_0\, \mathrm{e}^{i\omega t}, \qquad I = I_0\, \mathrm{e}^{i(\omega t + \varphi)} \qquad (U_0, I_0 \in \mathbb{R}, \quad U_0, I_0 > 0). \tag{12}$$

Wir definieren für U und I die komplexe Konstante Z durch

$$Z := U_0/I_0 \, \mathrm{e}^{-i\varphi}. \tag{13}$$

Sie heißt *Scheinwiderstand*. Mit ihr gilt das Ohmsche Gesetz der Wechselstromtechnik

$$U = ZI, \tag{14}$$

wie man direkt mit (12) nachrechnet. Der Realteil des Scheinwiderstandes ist der *Wirkwiderstand* R, während der Imaginärteil X der *Blindwiderstand* ist:

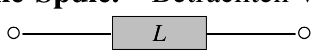
$$Z = R + iX = (U_0/I_0)\, \mathrm{e}^{i\varphi}. \tag{15}$$

Es gilt $R = \mathrm{Re}\,(U/I) = (U_0/I_0)\cos\varphi$, und $X = \mathrm{Im}\,(U/I) = (U_0/I_0)\sin\varphi$. *Bei Phasengleichheit zwischen Spannung U und Strom I, also $\varphi = 0$, ist der Scheinwiderstand Z reell.*

Der *Leitwert* Y eines Scheinwiderstandes Z ist einfach sein Kehrwert:

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{I_0}{U_0}\, \mathrm{e}^{-i\varphi}. \tag{16}$$

Er entsteht also einfach durch komplexe Inversion. Mit dem Leitwert ergibt sich für die Leistung $P = UI$ einfach $P = YU^2$.

(a) Wechselstrom durch eine Spule. Betrachten wir folgende elementare Schaltung mit einer Spule der Induktivität L: 

Der Strom durch die Spule stellt sich bei gegebener Spannung so ein, dass die induzierte Gegenspannung $-L\dot{I}$ genau dem Negativen der Spannung U entspricht, also: $L\dot{I} = U$. Mit (12) ist also

$$\boxed{I(t) = \int_0^t \frac{U}{L}\, \mathrm{d}\tau = \frac{U(t)}{i\omega L}} \qquad \text{bzw. reell:} \qquad I(t) = \int_0^t \tfrac{U}{L}\, \mathrm{d}\tau = \tfrac{U_0}{\omega L}\cos\left(\omega t - \tfrac{\pi}{2}\right). \tag{17}$$

Im Reellen ist also der Strom I gegenüber der Spannung U aus (11) um die Phase $\varphi = -\frac{\pi}{2}$

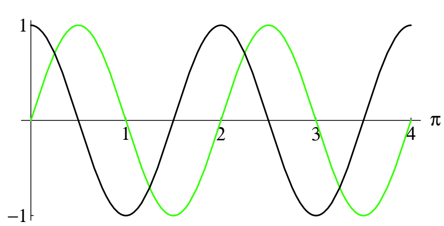


Abbildung 3: Die Kreisfunktionen gehen durch Phasenverschiebungen um $\varphi = +\frac{\pi}{2}$ bzw. $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ auseinander hervor: $\sin\alpha = \cos(\alpha - \frac{\pi}{2})$, $-\sin\alpha = \cos(\alpha + \frac{\pi}{2})$. Der Graph der cos-Funktion ist die dunklere Kurve.

verschoben, s. Abb. 3.

(b) Wechselstrom durch einen Kondensator. Betrachten wir die elementare Schaltung mit einem Kondensator der Kapazität C: ○—||—○ Bei einem Kondesator gilt allgemein für die Spannung U, die Ladungsmenge Q und die Kapazität C: $U = Q/C$. Da für den Strom immer $I = \dot{Q}$ gilt, ist $I = C\dot{U}$, oder mit (12) bzw. (11)

$$\boxed{I(t) = i\omega C U(t),} \qquad \text{bzw. reell:} \qquad I(t) = -\omega C U_0 \sin \omega t = \omega C U_0 \cos\left(\omega t + \tfrac{\pi}{2}\right), \tag{18}$$

ähnlich wie bei Gleichung (17). Der Kondensator im Reellen bewirkt also eine Phasenverschiebung des Stroms um $\varphi = +\frac{\pi}{2}$.

(c) Wechselstrom durch einen Ohmschen Widerstand. Gegeben sei folgende Schaltung mit einem Ohmschen Widerstand R: ○—[R]—○ Nach dem Ohmschen Gesetz gilt $U = RI$, also $I = U/R$, oder mit (12) bzw. (11):

$$\boxed{I(t) = RU(t),} \qquad \text{bzw. reell:} \qquad I(t) = \frac{U_0}{R} \cos \omega t. \tag{19}$$

Ein Ohmscher Widerstand bewirkt bei Wechselstrom keine Phasenverschiebung!

Welche physikalischen Konsequenzen hat eine Phasenverschiebung um φ? Dazu betrachten wir z.B. die Leistung P, die durch unsere obige Spulenschaltung mit der Phasenverschiebung $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ umgesetzt wird. Nach dem Joule'schen Gesetz gilt $\boxed{P = UI}$. Mit dem Additionstheorem

$$\sin \omega t \, \cos \omega t = \tfrac{1}{2} \sin 2\omega t$$

und mit den Gleichungen (11) und (17) für U und I haben wir somit: $P = \frac{U_0^2}{2\,\omega L} \sin 2\omega t$. Über eine Periode $T = 2\pi/\omega$ ergibt dies einen zeitlichen Mittelwert $\bar{P}$ von $\bar{P} = \frac{1}{T}\int_0^T P \, \mathrm{d}t$, also

$$\bar{P} = \frac{U_0^2}{2\,\omega L} \cdot \frac{\omega}{2\pi} \cdot \int_0^{2\pi/\omega} \sin 2\,\omega t \, \mathrm{d}t = \frac{U_0^2}{8\pi\omega L} \cos 2\,\omega t \bigg|_0^{2\pi/\omega} = 0. \tag{20}$$

Die mittlere Leistung ist Null! Dies illustriert graphisch die Abb. 4. D.h. die Leistung, die die

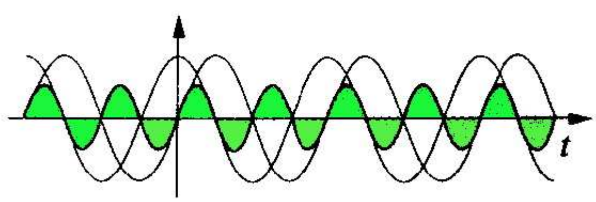


Abbildung 4: Die Leistung P einer Spule im Wechselstromkreis. Der zeitliche Mittelwert der Leistung $\bar{P}$ verschwindet, denn das Integral von P, d.h. die Summe über die eingefärbten Flächen, ist Null.

Spule in der ersten und der dritten Viertelperiode erzeugt, verbraucht sie exakt in den restlichen Viertelperioden. Es wird keine „Wirkleistung“ verbraucht, nur „Blindleistung“.

Allgemein ist ein gegen die Spannung U um die Phase φ verschobener Strom I gegeben durch (11). Mit dem Additionstheorem haben wir speziell

$$\cos(\omega t + \varphi) = \cos\omega t\ \cos\varphi - \sin\omega t\ \sin\varphi. \tag{21}$$

Damit spalten wir die phasenverschobene Funktion auf in eine Schwingung (der erste Summand), die genau in Phase mit der Spannung U ist, und in eine, die genau um $\frac{\pi}{2}$ verschoben ist. Der physikalische Effekt davon ist ersichtlich, wenn man die Leistung P betrachtet,

$$P = UI \underset{(21)}{=} U_0 I_0 \cos^2\omega t\ \cos\varphi - U_0 I_0 \sin\omega t\ \cos\omega t\ \sin\varphi.$$

Bei der zeitlichen Mittelung von P sieht man sofort, dass der erste Term der letzten einen nichtverschwindenden Beitrag liefert (solange die Phasenverschiebung $\varphi \neq \pm\frac{\pi}{2}$), während der zweite Term über die Periode gemittelt verschwindet, wie wir oben bei Gleichung (20) gesehen haben. In der Tat errechnet sich $\bar{P} = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos\varphi$.[2] Definieren wir für einen um φ phasenverschobenen Strom also den *Wirkstrom* I_W und den *Blindstrom* I_B durch

$$I_W := I_0 \cos\omega t \cos\varphi, \qquad \text{und} \qquad I_B := -I_0 \sin\omega t \sin\varphi, \tag{22}$$

und ferner die *Wirkleistung* P_W und die *Blindleistung* P_B:

$$P_W := UI_W = UI\cos\varphi, \qquad \text{und} \qquad P_B := UI_B = UI\sin\varphi. \tag{23}$$

Der zeitliche Mittelwert der Blindleistung P_B über eine Periode ergibt immer Null, während die Wirkleistung P_W für $\varphi \neq \pm\frac{\pi}{2}$ nicht verschwindet. Insbesondere gilt $\bar{P} = \overline{P_W}$, d.h. die gemittelte Leistung ist exakt die gemittelte Wirkleistung.

Für unseren obigen nur aus einer Spule bestehenden Stromkreis beispielsweise haben wir mit Gleichung (17) eine Phasenverschiebung um $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, und also $P_W = I_W = 0$.

Die Wirkleistung ist diejenige Leistung, die physikalisch verbraucht bzw. erzeugt wird. Sie wird von den üblichen Stromzählern gemessen und abgerechnet.

Definiert man die *Wirkleistung* P_W als den Realteil der Leistung P, und die *Blindleistung* P_B als deren Imaginärteil, d.h.

$$P = P_W + iP_B \tag{24}$$

Entsprechend definieren wir *Wirkstrom* I_W und *Blindstrom* I_B durch

$$I_W = \frac{I_0}{U_0}\,\mathrm{Re}\,[U\,\mathrm{e}^{i\varphi}], \quad I_B = \frac{I_0}{U_0}\,\mathrm{Im}\,[U\,\mathrm{e}^{i\varphi}]. \tag{25}$$

Es gilt einfach $I = I_W + iI_B$.

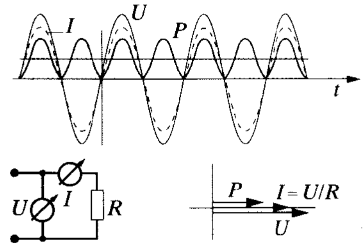
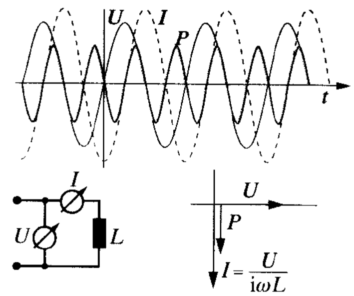
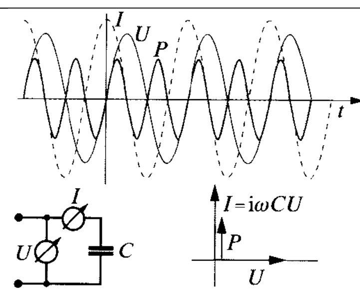
Entsprechend den oben angegebenen Beziehungen zwischen Spannung U und Strom I für die drei elementaren Schaltelemente bestimmen wir nun die entsprechenden komplexen Widerstände Z, die Leitwerte Y und die jeweilige Leistung P:[3]

---

[2] Denn (mit $T = 2\pi/\omega$):

$$\int_0^T \cos^2\omega t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4\omega}\sin 2\omega t\right]_0^T = \frac{T}{2}, \qquad \text{also} \qquad \bar{P} = \frac{1}{T}\int_0^T P\,\mathrm{d}t = \frac{U_0 I_0}{2}\cos\varphi.$$

[3] Beachte: $1/i = -i$, was sofort ersichtlich ist, wenn man zugibt: $i\cdot(-i) = 1 = i\cdot(1/i)$.

	Z	Y	$P = YU^2$ bei $t = 0$	
Ohmscher Widerstand $U = RI$	R	$\frac{1}{R}$	$\frac{U^2}{R}$	
Spule $U = L\dot{I} = i\omega LI$	$i\omega L$	$\frac{1}{i\omega L}$	$-\frac{iU^2}{\omega L}$	
Kondensator $I = C\dot{U} = i\omega CU$	$\frac{1}{i\omega C}$	$i\omega C$	$i\omega CU^2$	

Literatur

[1] C. Gerthsen (1995): *Physik.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg

[2] G. Merziger, G. Mühlbach, D. Wille & T. Wirth (1993): *Formeln + Hilfen zur Höheren Mathematik.* Binomi Verlag Springe

[3] L. Papula (1994): *Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. Band 2.* Vieweg Braunschweig Wiesbaden

[4] E. Zeidler (Hrsg.) (1996): *Teubner Taschenbuch der Mathematik.* Teubner Stuttgart Leipzig